第15卷 第1期 无锡轻工大学学报 JOURNAL OF WUXI UNIVERSITY OF LIGHT INDUSTRY Vol. 15 1996 No. 1

离散系统稳定性的一个定理

刘华玲

(数理学科部)

摘要 给出了关于离散定常线性系统的稳定性的一个定理的简化证明。根据这个定理可以通过矩阵的迹判断离散的定常线性系统的稳定性。

主题词 稳定性;离散系统;迹

中图分类号 O231

稳定性设计是控制系统设计的最基本的要求之一。对于离散的定常线性系统

$$x(k+1) = Ax(k) \tag{1}$$

的稳定性,其中 A 是 n 阶方阵。在外部输入为 O 的情况下,若系统对平衡状态有一个初始偏离,此后系统的状态总保持在平衡状态附近,则说系统的这个平衡状态是稳定的。若系统经过充分长的时间返回到这个状态,则称这个平衡状态是渐近稳定的。这两个概念严格叙述如下:

定义 如果对任意给定的 i_0 和任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在一个 $\delta > 0$,使得当 $\| x(i_0) \| < \delta$ 时,$\| x(i) \| < \varepsilon$,对任意 $i > i_0$ 成立,则称平衡状态 $x = 0$ 是(李雅普诺夫意义下)稳定的。

定义 如果平衡状态 $x = 0$ 是稳定的,并且对任意初始状态都有

$$\lim_{i \to \infty} x(i) = 0$$

则称平衡状态 $x = 0$ 是(李雅普诺夫意义下)渐近稳定的。

不在原点的情况可经坐标平移将它移到原点再进行讨论。

若已求出了矩阵 A 的所有特征值,则很容易判别系统的稳定性,但当系统的维数比较高时,要计算 A 的所有特征值,工作量是很大的;当 A 的特征多项式可求时,可利用 Jury 判据及 Routh-Hurwitz 判据来判别系统的稳定性。这些方法在实用上有一定的局限性。

在[1]中 Strejc 指出,应用矩阵的迹判断系统(1)的稳定性是实用的。文献[2]中给出了用矩阵迹来判别系统稳定性的一个定理。

定理 1 系统(1)渐近稳定的充分必要条件是

$$\lim_{k \to \infty} tr[A^k] = 0 \tag{2}$$

利用这个定理可以避开特征值和特征多项式的计算,用迭代法判别系统的稳定性。文献

收稿日期:1994-11-01

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

[2]中定理充分性的证明用到了数论的知识,而本文中给出了一个简易证明。

假定有 A 的特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$, 则 A^k 有特征根 $\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots\lambda_n^k$,且 $tr[A^k]=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^k$. 则$\lim_{k\to\infty} tr[A^k]=0$ 等价于$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^k=0$. 又由熟知的特征根判别法知系统(1)渐近稳定的充要条件为 λ_i 在单位圆内,综合可知有定理 1 的如下等价形式。

定理 2 对于任意一组复数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$, 使

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^k=0 \tag{3}$$

成立的充要条件为: $|\lambda_j|<1 \quad (j=1,2,\cdots n)$

证明:充分性显然成立,下证必要性。

假设有一组复数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$.

使 $\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^k=0$

且 $\alpha=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots|\lambda_n|\}\geqslant 1$

不失一般性,设 $|\lambda_1|=|\lambda_2|=\cdots=|\lambda_m|=\alpha$

且 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m \quad (1\leqslant m<n)$

由(3) 知 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$ 不全等

令 $\beta_j=\dfrac{\lambda_j}{\lambda_1} \quad (j=1,2,\cdots n)$

则 $\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_m=1$

$|\beta_j|\leqslant 1$ 这里$(m<j\leqslant n)$ 且 $\beta_j\neq 1$

考虑 $\left|\sum_{j=1}^{n}\beta_j^k\right|=\left|\sum_{j=1}^{n}\left(\dfrac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k\right|=\dfrac{1}{\alpha^k}\left|\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^k\right|$

由(3)知

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^k=0$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\beta_j^k=0 \tag{4}$$

即

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\beta_j^k=\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\beta_j^k+\sum_{j=m+1}^{n}\beta_j^k\right)=m+\lim_{k\to\infty}\sum_{j=m+1}^{n}\beta_j^k$$

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=m+1}^{n}\beta_j^k=-m \tag{5}$$

令

$$\delta_k=\sum_{j=m+1}^{n}\beta_j^k \tag{6}$$

利用 Stolz 定理及(5)有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{k}\delta_j}{k}=\lim_{k+1\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{k+1}\delta_j-\sum_{j=1}^{k}\delta_j}{k+1-k}=\lim_{k\to\infty}\delta_{k+1}=\lim_{k\to\infty}\sum_{j=m+1}^{n}\beta_j^{k+1}=-m \tag{7}$$

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

另,由于

$$\sum_{s=1}^{k}\delta_s=\sum_{s=1}^{k}\sum_{j=m+1}^{n}\beta_j^s=\sum_{j=m+1}^{n}\sum_{s=1}^{k}\beta_j^s=\sum_{j=m+1}^{n}\frac{\beta_j(1-\beta_j^k)}{1-\beta_j}$$

故

$$\left|\frac{1}{k}\sum_{s=1}^{k}\delta_s\right|\leqslant\frac{1}{k}\sum_{j=m+1}^{n}\frac{|\beta_j|(1+|\beta_j|^k)}{|1-\beta_j|}\leqslant\frac{1}{k}\sum_{j=m+1}^{n}\frac{2}{|1-\beta_j|}$$

从而有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{s=1}^{k}\delta_s=0$$

显然上式与(7)矛盾。

证毕

参 考 文 献

1 Strejc V. State Space Theory of Discrete Linear Control, John Wiley Sons, Inc. 1981

2 王 翼. 关于离散系统稳定性的一个定理. 控制理论及应用, 1987,4(3):85~87

3 王 翼. 离散控制系统. 科学出版社,1987

A Thorem on Stablity of Discrete Systems

Liu Hualing

(Dept. of Mathematics & Physics Science)

Abstract A primary proof about a theorem on stability of discrete time-invariable systems is presented. Based on this theorem, the stability of discrete time-invariable systems can be judge by traces.

Subject-words Stability; Discrete systems; Traces

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net