第 14 卷 无锡轻工大学学报 Vol. 14
第 1 期 JOURNAL OF WUXI UNIVERSITY OF LIGHT INDUSTRY 1995 No. 1

梯形公式的推广和改进

费荣昌　　杨宁津

（基础课部）

摘要　推广和改进了定积分近似计算的梯形公式。

主题词　近似求积；梯形公式；积分

中图分类号　O241.4

1 定　　理

如果 $f''(x)$ 在$[a,b]$连续，则有(a,b)内的数 ξ，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a) - \frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3$$

这是众所周知的定积分近似计算的梯形公式[1]。

文献[2]推广了矩形公式，本文将推广上述梯形公式。

为此，先考察当 $b \to a$ 时

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a) - \sum_{k=0}^{n-2}\frac{k}{2^{2k-1}(2k+1)!}f^{(2k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)^{2k+1}$$

$$-\frac{n-1}{2^{2n-3}(2n-1)!}f^{(2n-2)}(\xi)(b-a)^{2n-1} \qquad (1)$$

中 ξ 的变化趋势，有下述定理 1.

定理 1　如果 $f^{(2n-1)}(x)$ 在$[a,b]$存在，在 $x=a$ 处右连续，且 $f^{(2n-1)}(a)\neq 0$，那末(1)中的 ξ 有

$$\lim_{b\to a}\frac{\xi-a}{b-a} = \frac{1}{2}$$

然后，据定理 1，以 $\frac{a+b}{2}$ 代替(1)中的 ξ，即取

$$\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{2^{k-1}(2k+1)!}f^{(2k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)^{2k+1}$$

作为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值，有下述定理 2.

收稿日期：1994-01-07

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

定理2 如果 $f^{(2n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则有 (a,b) 内的数 ξ，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{2^{2k-1}(2k+1)!}f^{(2k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)^{2k+1}$$

$$-\frac{n}{2^{2n-1}(2n+1)!}f^{(2n)}(\xi)(b-a)^{2n+1}$$

当 $n=1$ 时即梯形公式。

推论 如果 $f^{(2n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $f^{(2k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)=0(k=1,2,\cdots,n-1)$，则有 (a,b) 内的数 ξ，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a) - \frac{n}{2^{2n-1}(2n+1)!}f^{(2n)}(\xi)(b-a)^{2n+1}$$

考虑 $f^{(i)}(a)=0\ (i=1,2,\cdots,n-1)$ 的情形。

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 单调连续，则有 $[a,b]$ 上的数 ξ，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(a)(\xi-a)+f(b)(b-\xi)$$

这是众所周知的积分第二中值公式[1]。

考察当 $b\to a$ 时积分第二中值公式中 ξ 的变化趋势，有下述定理3.

定理3 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 单调，$f^{(n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 存在，在 $x=a$ 处右连续，且 $f^{(i)}(a)=0\ (i=1,2,\cdots,n-1)$，$f^{(n)}(a)\neq 0$，那末积分第二中值公式中的 ξ 有

$$\lim_{b\to a}\frac{\xi-a}{b-a}=\frac{n}{n+1}$$

据此，以 $a+\frac{n}{n+1}(b-a)$ 代替积分第二中值公式中的 ξ，即取

$$\left[\frac{n}{n+1}f(a)+\frac{1}{n+1}f(b)\right](b-a)$$

作为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值，有下述定理4.

定理4 如果 $f^{(n+1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $f^{(i)}(a)=0\ (i=1,2,\cdots,n-1)$，则有 (a,b) 内的数 ξ，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{n}{n+1}f(a)+\frac{1}{n+1}f(b)\right](b-a) - \frac{1}{(n+1)(n+2)!}f^{(n+1)}(\xi)(b-a)^{n+2}$$

当 $n=1$ 时即梯形公式。

定理2和定理4推广改进了梯形公式。

2 定理的证明

为证定理1，先建立引理1.

引理1 $\sum_{i=1}^{2n-4}(2n-3-i)\binom{2n-3}{i}=(2n-3)(2^{2n-4}-1)$

$$\sum_{i=2}^{2n-3}(2n-2-i)\binom{2n-3}{i}=(2n-1)2^{2n-4}-(2n-2)(2n-3)-1$$

证 记

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$G(x)=\sum_{i=1}^{2n-4}\binom{2n-3}{i}x^{2n-3-i}=(1+x)^{2n-3}-x^{2n-3}-1$$

$$H(x)=\sum_{i=2}^{2n-3}\binom{2n-3}{i}x^{2n-2-i}=x(1+x)^{2n-3}-(2n-3)x^{2n-3}-x^{2n-2}$$

有

$$G'(x)=\sum_{i=1}^{2n-4}(2n-3-i)\binom{2n-3}{i}x^{2n-4-i}=(2n-3)[(1+x)^{2n-4}-x^{2n-4}]$$

$$H'(x)=\sum_{i=2}^{2n-3}(2n-2-i)\binom{2n-3}{i}x^{2n-3-i}$$

$$=(1+x)^{2n-3}+(2n-3)x(1+x)^{2n-4}-(2n-3)^2x^{2n-4}-(2n-2)x^{2n-3}$$

在以上两式中令 $x=1$ 即证。

定理 1 的证明　考虑极限

$$\lim_{b\to a}\frac{1}{(b-a)^{2n}}\left\{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)\right.$$
$$+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{k}{2^{2k-1}(2k+1)!}f^{(2k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)^{2k+1}$$
$$\left.+\frac{n-1}{2^{2n-3}(2n-1)!}f^{(2n-2)}(a)(b-a)^{2n-1}\right\}=A$$

一方面,由 L'Hospital 法则及引理 1,

$$A=\frac{1}{(2n)!}\lim_{b\to a}\frac{1}{b-a}\left\{-\frac{2n-3}{2}f^{(2n-2)}(b)\right.$$
$$+\frac{1}{2^{2n-3}}\left[n-2+\sum_{i=1}^{2n-4}(2n-3-i)\binom{2n-3}{i}\right]f^{(2n-2)}\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{n-1}{2^{2n-3}}f^{(2n-2)}(a)\Big\}$$
$$+\frac{1}{2^{2n-2}(2n)!}\left[(n-2)\binom{2n-3}{1}+\sum_{i=2}^{2n-3}(2n-2-i)\binom{2n-3}{i}-2^{2n-3}\right]f^{(2n-1)}(a)$$
$$=\frac{1}{2^{2n-2}(2n)!}\left[-(2n-3)2^{2n-3}+n-2+\sum_{i=1}^{2n-4}(2n-3-i)\binom{2n-3}{i}\right.$$
$$\left.+(n-2)(2n-3)+\sum_{i=2}^{2n-3}(2n-2-i)\binom{2n-3}{i}-2^{2n-3}\right]f^{(2n-1)}(a)$$
$$=-\frac{n-1}{2^{2n-2}(2n-1)!}f^{(2n-1)}(a)$$

另一方面,由(1)

$$A=-\frac{n-1}{2^{2n-3}(2n-1)!}\lim_{b\to a}\frac{f^{(2n-2)}(\xi)-f^{(2n-2)}(a)}{\xi-a}\cdot\frac{\xi-a}{b-a}$$
$$=-\frac{n-1}{2^{2n-3}(2n-1)!}f^{(2n-1)}(a)\lim_{b\to a}\frac{\xi-a}{b-a}$$

因 $f^{(2n-1)}(a)\neq 0$,有

$$\lim_{b\to a}\frac{\xi-a}{b-a}=\frac{1}{2}$$

为证定理 2,先建立引理 2.

引理 2

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\binom{2n}{2k+1} = (n-1)2^{2n-2}$$

$$\sum_{k=1}^{n-[i/2]-1} k(2n-2k-1)(2n-2k-2)\cdots(2n-2k-i)\binom{2n}{2k+1}$$
$$= 2^{2n-i-2}n(2n-i-2)(2n-1)(2n-2)\cdots(2n-i+1),\ (i=1,2,\cdots,2n-2)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2n-2k}\binom{2n}{2k+1} = \frac{n}{2n+1}(2^{2n}-1) - 2^{2n-2}$$

证 记

$$H(x,y) = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}x^k y^{2n-2k-1} = \frac{1}{2}x^{n-\frac{1}{2}}\left[(1+\frac{y}{\sqrt{x}})^{2n} - (1-\frac{y}{\sqrt{x}})^{2n}\right]$$

有

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \sum_{k=1}^{n-1} k\binom{2n}{2k+1}x^{k-1}y^{2n-2k-1} = \frac{1}{2}(n-\frac{1}{2})x^{n-\frac{3}{2}}\left[(1+\frac{y}{\sqrt{x}})^{2n} - (1-\frac{y}{\sqrt{x}})^{2n}\right]$$
$$-\frac{n}{2}x^{n-2}y\left[(1+\frac{y}{\sqrt{x}})^{2n-1} + (1-\frac{y}{\sqrt{x}})^{2n-1}\right]$$

$$\frac{\partial^{i+1}H}{\partial x\partial y^i} = \sum_{k=1}^{n-[i/2]-1} k(2n-2k-1)(2n-2k-2)\cdots(2n-2k-i)\binom{2n}{2k+1}x^{k-1}y^{2n-2k-i-1}$$
$$= (n-\frac{i+1}{2})n(2n-1)(2n-2)\cdots(2n-i+1)x^{n-\frac{i+3}{2}}\left[(1+\frac{y}{\sqrt{x}})^{2n-i}\right.$$
$$\left.-(-1)^i(1-\frac{y}{\sqrt{x}})^{2n-i}\right] - \frac{n}{2}(2n-1)(2n-2)\cdots(2n-i)x^{n-\frac{i+4}{2}}$$
$$y\left[(1+\frac{y}{\sqrt{x}})^{2n-i-1} + (-1)^i(1-\frac{y}{\sqrt{x}})^{2n-i-1}\right]$$

$$\int_0^y \frac{\partial H}{\partial x}\mathrm{d}y = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2n-2k}\binom{2n}{2k+1}x^{k-1}y^{2n-2k}$$
$$= \frac{n}{2(2n+1)}x^{n-1}\left[(1+\frac{y}{\sqrt{x}})^{2n+1} + (1-\frac{y}{\sqrt{x}})^{2n+1} - 2\right]$$
$$-\frac{1}{4}x^{n-\frac{3}{2}}y\left[(1+\frac{y}{\sqrt{x}})^{2n} - (1-\frac{y}{\sqrt{x}})^{2n}\right]$$

在以上各式中令 $x=1, y=1$ 即证。

定理2的证明 记 $F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$，使用 Taylor 公式，并采用积分余项，有

$$F(b) = \sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i!}F^{(i)}(a)(b-a)^i + \frac{1}{(2n)!}\int_a^b F^{(2n+1)}(x)(b-x)^{2n}\mathrm{d}x$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i!}f^{(i-1)}(a)(b-a)^i + \frac{1}{(2n)!}\int_a^b f^{(2n)}(x)(b-x)^{2n}\mathrm{d}x$$

而

$$f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{2n-1}\frac{1}{i!}f^{(i)}(a)(b-a)^i + \frac{1}{(2n-1)!}\int_a^b f^{(2n)}(x)(b-x)^{2n-1}\mathrm{d}x$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$f^{(2k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)=\sum_{i=0}^{2n-2k-1}\frac{1}{i!}f^{(2k+i)}(a)\left(\frac{b-a}{2}\right)^{i}+\frac{1}{(2n-2k-1)!}\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}f^{(2n)}(x)\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^{2n-2k-1}\mathrm{d}x$$

于是

$$\begin{aligned}R_n&=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\kappa}{2^{2k-1}(2k+1)!}f^{(2k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)^{2k+1}\\&=\frac{1}{(2n)!}\int_a^b f^{(2n)}(x)(b-x)^{2n}\mathrm{d}x-\frac{b-a}{2\cdot(2n-1)!}\int_a^b f^{(2n)}(x)(b-x)^{2n-1}\mathrm{d}x\\&\quad+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(b-a)^{2k+1}}{2^{2k-1}(2k+1)!(2n-2k-1)!}\int_a^{\frac{a+b}{2}}f^{(2n)}(x)\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^{2n-2k-1}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{(2n)!}\int_a^{\frac{a+b}{2}}f^{(2n)}(x)g(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{(2n)!}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f^{(2n)}(x)[(b-x)^{2n}-n(b-a)(b-x)^{2n-1}]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}g(x)&=(b-x)^{2n}-n(b-a)(b-x)^{2n-1}\\&\quad+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k-1}}\binom{2n}{2k+1}(b-a)^{2k+1}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^{2n-2k-1}\end{aligned}$$

由引理 2

$$g(a)=g'(a)=\cdots=g^{(2n-2)}(a)=0,\ g^{(2n-1)}(x)<0\quad\left(a<x<\frac{a+b}{2}\right)$$

即有

$$g(x)<0\quad\left(a<x<\frac{a+b}{2}\right)$$

又显然

$$(b-x)^{2n}-n(b-a)(b-x)^{2n-1}<0\quad\left(\frac{a+b}{2}<x<b\right),$$

于是由积分第一中值定理,存在 $\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$ 内的数 ξ_1 及 $\left(\frac{a+b}{2},b\right)$ 内的数 ξ_2,使

$$\begin{aligned}R_n&=\frac{1}{(2n)!}f^{(2n)}(\xi_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}}g(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{(2n)!}f^{(2n)}(\xi_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^b[(b-x)^{2n}-n(b-a)(b-x)^{2n-1}]\mathrm{d}x\\&=-\frac{n}{2^{2n-1}(2n+1)!}\left[\frac{1}{2}f^{(2n)}(\xi_1)+\frac{1}{2}f^{(2n)}(\xi_2)\right](b-a)^{2n+1}\end{aligned}$$

再用介值定理即证。

定理 3 的证明　记 $F(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$,则 $F^{(i)}(a)=0\quad(i=2,3,\cdots,n)$,据 Taylor 公式,有

$$F(b)=F(a)+F'(a)(b-a)+\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\xi_1)(b-a)^{n+1}\quad(a<\xi_1<b)$$

即

$$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x=f(a)(b-a)+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n)}(\xi_1)(b-a)^{n+1}$$

而

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi_2)(b-a)^n \quad (a<\xi_2<b)$$

代入积分第二中值公式,得

$$\frac{1}{n+1}f^{(n)}(\xi_1)(b-a)=f^{(n)}(\xi_2)(b-\xi)$$

令 $b\to a$,因 $f^{(n)}(a)\neq 0$,有

$$\lim_{b\to a}\frac{b-\xi}{b-a}=\frac{1}{n+1}$$

即

$$\lim_{b\to a}\frac{\xi-a}{b-a}=\frac{n}{n+1}$$

定理4的证明 记 $F(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$,则 $F^{(i)}(a)=0 \quad (i=2,3,\cdots,n)$,使用Taylor公式,并采用积分余项,有

$$F(b)=F(a)+F'(a)(b-a)+\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(a)(b-a)^{n+1}$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\int_a^b F^{(n+2)}(x)(b-x)^{n+1}\mathrm{d}x$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(a)(b-a)+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n)}(a)(b-a)^{n+1}$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^{n+1}\mathrm{d}x$$

而

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(b-a)^n+\frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n\mathrm{d}x$$

于是

$$R_n=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\left[\frac{n}{n+1}f(a)+\frac{1}{n+1}f(b)\right](b-a)$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)[(b-x)^{n+1}-(b-a)(b-x)^n]\mathrm{d}x$$

显然

$$(b-x)^{n+1}-(b-a)(b-x)^n<0 \quad (a<x<b)$$

于是由积分第一中值定理,存在 (a,b) 内的数 ξ,使

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\int_a^b[(b-x)^{n+1}-(b-a)(b-x)^n]\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{(n+1)(n+2)!}f^{(n+1)}(\xi)(b-a)^{n+2}$$

3 举 例

把 $[a,b]$ 等分成 m 个区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{m-1},x_m] \quad (x_0=a,x_m=b)$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

记

$$f(x_i)=y_i,\quad f^{(2k)}\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)=y_{i+\frac{1}{2}}^{(2k)}$$

在每个区间上分别使用定理 2,有近似公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \doteq \frac{b-a}{m}\left(\frac{y_0+y_m}{2}+\sum_{i=1}^{m-1}y_i\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{2^{2k-1}(2k+1)!}\left(\frac{b-a}{m}\right)^{2k+1}\sum_{i=0}^{m-1}y_{i+\frac{1}{2}}^{(2k)} \tag{2}$$

$$|R_n|\leqslant\frac{n}{2^{2n-1}(2n+1)!m^{2n}}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(2n)}(x)|(b-a)^{2n+1}$$

例 1 计算 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$

在(2)中分别令 $n=1,2$,得近似公式:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}m}\left[\frac{1}{2}(1+e^{-\frac{1}{2}})+\sum_{i=1}^{m-1}e^{-\frac{1}{2}(\frac{i}{m})^2}\right] \tag{3}$$

$$|R_1|\leqslant\frac{1}{12\sqrt{2\pi}\,m^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}m}\left\{\frac{1}{2}(1+e^{-\frac{1}{2}})+\sum_{i=1}^{m-1}e^{-\frac{1}{2}(\frac{i}{m})^2}-\frac{1}{12m^2}\sum_{i=0}^{m-1}\left[\left(\frac{2i+1}{2m}\right)^2-1\right]e^{-\frac{1}{2}(\frac{2i+1}{2m})^2}\right\} \tag{4}$$

$$|R_2|\leqslant\frac{1}{160\sqrt{2\pi}\,m^4}$$

按近似公式(3)(4)计算得表 1.

表 1 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$ **的近似值**

m	1	2	3
近似公式(3)	$0.32\pm3\times10^{-2}$	$0.336\pm8\times10^{-3}$	$0.339\pm4\times10^{-3}$
近似公式(4)	$0.342\pm2\times10^{-3}$	$0.3414\pm2\times10^{-4}$	$0.34136\pm3\times10^{-5}$

显然(4)优于(3).

例 2 计算 $\int_0^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}\quad(b>0)$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\qquad f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$$

在定理 4 中分别令 $n=1,2,3,4$,得近似公式

$$\int_0^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}\doteq\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{1+b^4}}\right)b \tag{5}$$

$$|R_1|\leqslant\frac{1}{2\times3!}\times6(b^6+b^2)b^3$$

$$\int_0^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}\doteq\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3\sqrt{1+b^4}}\right)b \tag{6}$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$|R_2| \leqslant \frac{1}{3 \times 4!} \times 12(2b^9 + 7b^5 + b)b^4$$

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \doteq (\frac{3}{4} + \frac{1}{4\sqrt{1+b^4}})b \tag{7}$$

$$|R_3| \leqslant \frac{1}{4 \times 5!} \times 12(10b^{12} + 81b^8 + 48b^4 + 1)b^5$$

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \doteq (\frac{4}{5} + \frac{1}{5\sqrt{1+b^4}})b \tag{8}$$

$$|R_4| \leqslant \frac{1}{5 \times 6!} \times 360(2b^{15} + 31b^{11} + 44b^7 + 7b^3)b^6$$

按近似公式(5)(6)(7)(8)计算得表2.

表2 $\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ 的近似值

b	0.1	0.3	0.5
近似公式(5)	$0.099998 \pm 5 \times 10^{-6}$	$0.299 \pm 1 \times 10^{-3}$	$0.49 \pm 2 \times 10^{-2}$
近似公式(6)	$0.099998 \pm 2 \times 10^{-6}$	$0.2996 \pm 4 \times 10^{-4}$	$0.495 \pm 8 \times 10^{-3}$
近似公式(7)	$0.0999988 \pm 3 \times 10^{-7}$	$0.29970 \pm 8 \times 10^{-5}$	$0.496 \pm 3 \times 10^{-3}$
近似公式(8)	$0.099999 \pm 7 \times 10^{-10}$	$0.29976 \pm 1 \times 10^{-5}$	$0.497 \pm 2 \times 10^{-3}$

当b较小时,显然(6)(7)(8)优于(5).

参 考 文 献

1 Г. М. 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程:第二卷第一分册. 人民教育出版社,1956

2 费荣昌,徐宝仁,蒋炳鑫. 矩形公式的推广和改进. 无锡轻工业学院学报,1993,(1):68~77

3 Poffald E I. The remainder in Taylor's formula, Amer. Math. Monthly, 1989,97:205~213

The Extension and Improve of Trapezoid formula

Fei Rongchang Yang Ningjin

(Dept. of General Education)

Abstract In this paper, we extension and improve the trapezoid formula of difinite integrals' approximate calculation.

Subject-words Approximate integration; Trapezoid formula; Integrals

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net