第6卷 第3期 无锡轻工业学院学报 JOURNAL OF THE WUXI INSTITUTE OF LIGHT INDUSTRY Vol.6 1987 No.3

整数和集的渐近密率

孙 子 常

（基础课部）

一、引 言

设A和B都是自然数的集合，而C是它们的和，$C=\{e_1a+e_2b|a\in A,b\in B,e_1,e_2=0,1\}$。以$A[n]$表示$A\cap\{1,2,\cdots,n\}$，而$A(n)$为$A[n]$中元素的个数，则$A$的渐近密率为

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{A(n)}{n},$$

这就是说，任给$\eta>0$，，必有m_0，使当$n>m_0$时

$$\frac{A(n)}{n}>\alpha-\eta。$$

假定B是自然数的一个渐近基底，即，有k，使任一自然数$m\geqslant k$恒能表成B中有限个元素之和

$$m=b_1+b_2+\cdots b_{g(m)},\quad b_i\in B。$$

取$g(n)$为最小可能的值。让

$$\lambda=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{m=k+1}^{n}\frac{g(m)}{n},$$

因此，对于任何$\varepsilon>0$，有，$k_0>k$，使$n>k_0$时

$$\sum_{m=k+1}^{n}\frac{g(m)}{n}<\lambda+\varepsilon,$$

这个λ叫做B的渐近平均阶数。

让$C=A+B$的渐近密率γ，周伯埙曾经证明了下面两个定理[2]：

定理1′ 若$\alpha\geqslant 1/2^r$，而r是一个自然数，则

$$\gamma\geqslant\alpha\left\{1+\frac{2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r}}{2\lambda}+\frac{\alpha^{1-1/r}(2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r})^2}{8\lambda^3}\right\}$$

本文1987年1月20日收到。

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

定理2′　若$\alpha\geqslant 1/4$，即对于$r=2$的情况，则

$$\gamma\geqslant\alpha\left\{1+\frac{1-\sqrt{\alpha}}{\lambda}+\frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})^2}{2\lambda^3}\right\}$$

本文将推广上面的两个定理，从而得到

定理1　$\alpha\geqslant 1/2^r$，而r是一个自然数，则

$$\gamma\geqslant\alpha\left\{1+\frac{2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r}}{2\lambda}+\frac{\alpha^{1-1/r}(2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r})^2}{8\lambda^3}\right.$$
$$\left.+\frac{(\alpha^{1-1/r})^2(2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r})^3}{32\lambda^5}+\frac{(\alpha^{1-1/r})^3(2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r})^4}{128\lambda^7}\right\}$$

特别是，于$\alpha\geqslant 1/4$时，即让$r=2$的情况时有

定理2　若$\alpha\geqslant 1/4$，则

$$\gamma\geqslant\alpha\left\{1+\frac{1-\sqrt{\alpha}}{\lambda}+\frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})^2}{2\lambda^3}+\frac{\alpha(1-\sqrt{\alpha})^3}{4\lambda^5}+\frac{\alpha\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})^4}{8\lambda^7}\right\}$$

定理3　$\alpha\geqslant 1/2^r$，而r是一个自然数，则

$$\gamma\geqslant\alpha\left\{1+\frac{2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r}}{2\lambda}+\frac{\alpha^{1-1/r}(2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r})^2}{8\lambda^3}\right.$$
$$+\frac{(\alpha^{1-1/r})^2(2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r})^3}{32\lambda^5}$$
$$\left.+\cdots+\frac{(\alpha^{1-1/r})^n(2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r})^{n-1}}{(2\lambda)^{2n+1}}+\cdots\right\}$$

即

$$\gamma\geqslant\alpha\left\{1+\frac{2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r}}{2\lambda}\cdot\frac{1}{1-\frac{\alpha^{1-1/r}(2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r})}{4\lambda^2}}\right\}$$

特别是，于$\alpha\geqslant 1/4$时，即让$r=2$的情况时有

定理4　若$\alpha\geqslant 1/4$，则

$$\gamma\geqslant\alpha\left\{1+\frac{1-\sqrt{\alpha}}{\lambda}+\frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})^2}{2\lambda^3}+\frac{\alpha(1-\sqrt{\alpha})^3}{4\lambda^5}\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{(\sqrt{\alpha})^n(1-\sqrt{\alpha})^{n+1}}{2^{n+1}\cdot\lambda^{2n+1}}+\cdots\right\}$$

即

$$\gamma\geqslant\alpha\left\{1+\frac{1-\sqrt{\alpha}}{\lambda}\cdot\frac{1}{1-\frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})}{2\lambda^2}}\right\}$$

二、几条引理

所拟证的定理对于$\alpha=1$的情况是明显的，假定$\alpha<1$，而在本节及以后诸节中，假定

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$\alpha \geqslant 1/2^r$。任给$\eta>0$，$\varepsilon>0$。令$\overline{\alpha}=\alpha-\eta$，$\overline{\lambda}=\lambda+\varepsilon$。于是有$m_0$，使当$n>m_0$时

$$\frac{A(n)}{n}>\alpha-\eta=\overline{\alpha}$$

而且有，$k_0>k$使当$n>k_0>k$时

$$\sum_{m=k+1}^{n} g(m)<(\lambda+\varepsilon)n=\overline{\lambda}\,n_0$$

令$n_0=max(m_0,\ k_0)$。

取充分大的n，让$Z=[\alpha^{1/r}n]$，使$n-n_0\geqslant Z\geqslant[\frac{1}{2}n]\geqslant n_0$

固定这个n_0，我们有(本文中所有$O(-)$记号都是对$n\to\infty$而言的)：

引理1 $\overline{\alpha}Z(2n-Z)<2\overline{\lambda}Z\{C(n)-A(n)\}-\{C(n)-A(n)\}^2+A(n)^2+O(n)$。

引理1有一个较弱的形式：

引理1′ $\overline{\alpha}Z(2n-Z)<2\overline{\lambda}Z\{C(n)-A(n)\}+A(n)^2+O(n)$。

引理2 设$0<\alpha<1$，r是正实数，$u_r=(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1/r}$

则u_r随r的增大而单调上升。

以上诸引理的证明见[2]。

注意到定理2,4分别为定理1,3的直接推论，我们只需证明定理1,3。

1。定理1的证明

我们还需要几条引理。

引理3 设$0<\alpha<1$，

$$v_r=\left\{1+\frac{2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r}}{2}+\frac{\alpha^{1-1/r}(2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r})^2}{8}\right.$$

$$\left.+\frac{(\alpha^{1-1/r})^2(2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r})^3}{32}+\frac{(\alpha^{1-1/r})^3(2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r})^4}{128}\right\}^2$$

则$v_2>v_3>\cdots$。

证 因为$\alpha^x+\alpha^{1/x}$在$0<x\leqslant\frac{1}{2}$时是下降的。

所以$\alpha^{1/r}+\alpha^{1-1/r}<\alpha^{1/r+1}+\alpha^{1-1/r+1}$，

于是$2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r}>2-\alpha^{1/r+1}-\alpha^{1-1/r+1}$，

因此，对于任何正整数m，有

$$(2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r})^m>(2-\alpha^{1/r+1}-\alpha^{1-1/r+1})^m \qquad (1)$$

又由于$1/r>1/r+1$，故$1-1/r<1-1/r+1$，且$0<\alpha<1$，所以，$\alpha^{1-1/r}>\alpha^{1-1/r+1}$，

于是对任何正整数n，有

$$(\alpha^{1-1/r})^n>(\alpha^{1-1/r+1})^n \qquad (2)$$

由(1),(2)可以看出引理的结论是正确的。

同样由引理3的证明可以得出一个更好的形式：

引理3′，设$0<\alpha<1$，

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$v_r=\left\{1+\frac{2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r}}{2}+\frac{\alpha^{1-1/r}(2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r})^2}{8}\right.$$
$$+\frac{(\alpha^{1-1/r})^2(2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r})^3}{32}$$
$$\left.+\cdots+\frac{(\alpha^{1-1/r})^n(2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r})^{n+1}}{2^{2n+1}}+\cdots\right\}^2$$

则$v_2>v_3>\cdots$。

引理4　若$r\geqslant 2, 0<\alpha<1$，则引理2与引理3中的u_r与v_r满足不等式$u_r\geqslant\alpha v_r$，

证　若$r\geqslant 2$，使$u_r<\alpha v_r$ 则因$u_r>u_2$，$\alpha v_r<\alpha v_2$，故必有$u_2<\alpha v_2$，即

$$\sqrt{\alpha}(2-\sqrt{\alpha})<\alpha\left\{1+(1-\sqrt{\alpha})+\frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})^2}{2}+\frac{\alpha(1-\sqrt{\alpha})^3}{4}\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})^4}{8}\right\}^2$$

因此

$$2-\sqrt{\alpha}<\sqrt{\alpha}\left\{(2-\sqrt{\alpha})+\frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})^2}{2}+\frac{\alpha(1-\sqrt{\alpha})^3}{4}\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})^4}{8}\right\}^2$$

所以我们有

$$(2-\sqrt{\alpha})\left\{1-\sqrt{\alpha}(2-\sqrt{\alpha})-\alpha(1-\sqrt{\alpha})^2-\frac{\alpha\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})^3}{2}\right.$$
$$\left.-\frac{\alpha^2(1-\sqrt{\alpha})^4}{4}\right\}<\frac{\alpha\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})^4}{4}\left\{1+\frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})}{2}\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha(1-\sqrt{\alpha})^2}{4}\right\}^2$$

即

$$(2-\sqrt{\alpha})(1-\sqrt{\alpha})^3\left\{1+\sqrt{\alpha}-\frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{2}-\frac{\alpha^2(1-\sqrt{\alpha})}{4}\right\}<\frac{\alpha\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})^4}{4}$$
$$\cdot\left\{1+\frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})}{2}\right\}^4$$

所以

$$(2-\sqrt{\alpha})\frac{4(1+\sqrt{\alpha})-2\alpha\sqrt{\alpha}-\alpha^2(1-\sqrt{\alpha})}{4}<\frac{\alpha\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})}{4}$$
$$\cdot\left\{1+\frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})}{2}\right\}^4$$

即

$$(2-\sqrt{\alpha})\left\{1+\frac{\sqrt{\alpha}(4-2\alpha-\alpha\sqrt{\alpha}+\alpha^2)}{4}\right\}<\frac{\alpha\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})}{4}$$
$$\cdot\left\{1+\frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})}{2}\right\}^4$$

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

显然左方大于1，我们肯定右方小于1，事实上，因为函数$f(x)=x(1-x)$在$0<x<1$的最大值为$\frac{1}{4}$

$$\therefore \quad \sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})\leqslant\frac{1}{4}$$

故其右方为

$$\frac{\alpha\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})}{4}\left\{1+\frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})}{2}\right\}^4<\frac{1}{4^2}\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)^4=\left(\frac{9}{16}\right)^4<1,$$

矛盾。

引理4′ 若$r\geqslant 2$，$0<\alpha<1$，则引理2与引理3′中的u_r与v_r满足不等式$u_r\geqslant\alpha v_r$

证 若有$r\geqslant 2$使$u_r<\alpha v_r$，则$u_r\geqslant u_2$，$\alpha v_r\leqslant\alpha v_2$，故必有$u_2<\alpha v_2$，即

$$\sqrt{\alpha}(2-\sqrt{\alpha})<\alpha\left\{1+(1-\sqrt{\alpha})+\frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})^2}{2}+\frac{\alpha(1-\sqrt{\alpha})^3}{4}\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{(\sqrt{\alpha})^n(1-\sqrt{\alpha})^{n+1}}{2^n}+\cdots\right\}^2$$

所以

$$2-\sqrt{\alpha}<\sqrt{\alpha}\left\{(2-\sqrt{\alpha})+\frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})^2}{2}+\frac{\alpha(1-\sqrt{\alpha})^3}{4}\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{(\sqrt{\alpha})^n(1-\sqrt{\alpha})^{n+1}}{2^n}+\cdots\right\}^2$$

因此

$$(2-\sqrt{\alpha})\left\{1-\sqrt{\alpha}(2-\sqrt{\alpha})-\alpha(1-\sqrt{\alpha})^2-\frac{\alpha\sqrt{\alpha}(1\sqrt{\alpha})^3}{2}\right.$$

$$\left.-\cdots-\frac{(\sqrt{\alpha})^{n+1}(1-\sqrt{\alpha})^{n+1}}{2^{n-1}}-\cdots\right\}$$

$$<\sqrt{\alpha}\left\{\frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})^2}{2}+\frac{\alpha(1-\sqrt{\alpha})^3}{4}+\cdots+\frac{(\sqrt{\alpha})^n(1-\sqrt{\alpha})^{n+1}}{2^n}+\cdots^2\right\}$$

故

$$(2-\sqrt{\alpha})(1-\sqrt{\alpha})^3\left\{1+\sqrt{\alpha}-\frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{2}-\cdots-\frac{(\sqrt{\alpha})^{n+1}(1-\sqrt{\alpha})^{n-2}}{2^{n-1}}-\cdots\right\}$$

$$<\frac{\alpha\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})^4}{4}\left\{1+\frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})}{2}+\cdots+\frac{(\sqrt{\alpha})^{n-1}(1-\sqrt{\alpha})^{n-1}}{2^{n-1}}+\cdots\right\}^2$$

于是

$$(2-\sqrt{\alpha})\left\{1+\sqrt{\alpha}-\frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})}{2}}\right\}<\frac{\alpha\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})}{4}$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{1-\frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})}{2}}\right\}^2$$

所以

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$(2-\sqrt{\alpha})\left\{1+\frac{\sqrt{\alpha}(2-\alpha\sqrt{\alpha})}{2-\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})}\right\}<\frac{1}{4^2}\left\{\frac{1}{1-\frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})}{2}}\right\}^2$$

$$=\left\{\frac{1}{2-\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})}\right\}^2$$

显然左方大于1，而右方小于1，矛盾。

引理5　设p、q都是正实数，且$p^2-4q>0$，则函数

$$F(x)=x+\frac{1}{p}\left\{q-x^2+\frac{1}{p^2}(q-x^2)^2+\frac{1}{p^4}(q-x^2)^3+\frac{1}{p^6}(q-x^2)^4\right\}$$

于区间$0\leqslant x\leqslant\sqrt{q}$上单调上升。

证

$$F'(x)=1+\frac{1}{p}\left\{-2x+\frac{2}{p^2}(q-x^2)(-2x)+\frac{3}{p^4}(q-x^2)^2(-2x)\right.$$

$$\left.+\frac{4}{p^6}(p-x^2)^3(-2x)\right\}=1-\frac{2x}{p}\left\{1+\frac{2}{p^2}(q-x^2)+\frac{3}{p^4}(q-x^2)^2\right.$$

$$\left.+\frac{4}{p^6}(q-x^2)^3\right\}>1-\left\{\frac{2x}{p}\left\{1+\frac{2}{p^2}(q-x^2)+\frac{4}{p^4}(q-x^2)^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{8}{p^6}(q-x^2)^3\right\}>1-\frac{2x}{p}\left\{\frac{1}{1-\frac{2}{p^2}(q-x^2)}\right\}=1-\frac{2px}{p^2-2(q-x^2)}>0\right.$$

事实上，

$$f(x)=\frac{2px}{p^2-2(q-x^2)},\ f'(x)=\frac{2p(p^2-2q-2x^2)}{[p^2-2(q-x^2)]^2}>0,$$

当$0\leqslant x\leqslant\sqrt{q}$时，$\therefore f(x)$在区间$0\leqslant x\leqslant\sqrt{q}$上单调上升，而

$$f(\sqrt{q})=\frac{2p\sqrt{q}}{p^2}=\frac{2\sqrt{q}}{p}<1,\ \therefore f(x)\leqslant 1,\ \text{在}\ 0\leqslant x\leqslant\sqrt{q}\ \text{上}$$

由引理5的证明，可以看出下列结论正确，即

引理5′　设p、q都是正实数，且$p^2-4q>0$，则函数

$$F(x)=x+\frac{1}{p}\left\{q-x^2+\frac{1}{p^2}(q-x^2)^2+\frac{1}{p^4}(q-x^2)^3+\frac{1}{p^6}(q-x^2)^4\right.$$

$$\left.+\cdots+\left[\frac{1}{p^{2n}}(q-x^2)^{n+1}\right]+\cdots\right\},$$

于区间$0\leqslant x\leqslant\sqrt{q}$上单调上升。

引理6

$$\frac{C(n)}{n}>\alpha\left\{1+\frac{2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r}}{2\lambda}+\frac{\alpha^{1-1/r}(2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r})^2}{8\lambda^3}\right.$$

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$+\frac{(\alpha^{1-1/r})^2(2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r})^3}{32\lambda^5}+\frac{(\alpha^{1-1/r})^3(2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r})^4}{128\lambda^7}\Big\}$$

$$+R+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3}$$

证

$$\frac{C(n)}{n}<\frac{A(n)}{n}+\frac{1}{2\lambda\alpha^{1/r}}\left\{(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\frac{A(n)^2}{n^2}+\left(\frac{C(n)}{n}-\frac{A(n)}{n}\right)^2\right\}$$

$$+R_1+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4}$$

$$\frac{C(n)}{n}-\frac{A(n)}{n}>\frac{1}{2\lambda\alpha^{1/r}}\left\{(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\frac{A(n)^2}{n^2}\right\}+R_2+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{5}$$

由(4)得

$$\frac{C(n)}{n}-\frac{A(n)}{n}>\frac{1}{2\lambda\alpha^{1/r}}\left\{(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\frac{A(n)^2}{n^2}+\left(\frac{C(n)}{n}-\frac{A(n)}{n}\right)^2\right\}$$

$$+R_2+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{6}$$

我们分两种情况来讨论：

第一种情况，

$$\frac{A(n)^2}{n^2}<(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}$$

将(5)代入(6)右方的平方项，再将所得之不等式代入(4)右方的平方项，有

$$\frac{C(n)}{n}>\frac{A(n)}{n}+\frac{1}{2\lambda\alpha^{1/r}}\left\{(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\frac{A(n)^2}{n^2}+\frac{1}{4\lambda^2\alpha^{2/r}}\right.$$

$$\left.\left\{(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\frac{A(n)^2}{n^2}+\frac{1}{4\lambda^2\alpha^{2/r}}\left[(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\frac{A(n)^2}{n^2}\right]^2\right\}^2\right\}$$

$$+R_3+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{A(n)}{n}+\frac{1}{2\lambda\alpha^{1/r}}\left\{(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\frac{A(n)^2}{n^2}+\frac{1}{4\lambda^2\alpha^{2/r}}\left\{\left[(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}\right.\right.\right.$$

$$\left.-\frac{A(n)^2}{n^2}\right]^2+\frac{2}{4\lambda^2\alpha^{2/r}}\left[(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\frac{A(n)^2}{n^2}\right]^3+\frac{1}{16\lambda^4\alpha^{4/r}}\left[(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{A(n)^2}{n^2}\right]^4\right\}\right\}+R_3+O\left(\frac{1}{n}\right)>\frac{A(n)}{n}+\frac{1}{2\lambda\alpha^{1/r}}\left\{(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\frac{A(n)^2}{n^2}\right.$$

$$+\frac{1}{4\lambda^2\alpha^{2/r}}\left[(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\frac{A(n)^2}{n^2}\right]^2+\frac{1}{16\lambda^4\alpha^{4/r}}\left[(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{A(n)^2}{n^2}\right]^3+\frac{1}{16\times4\lambda^6\alpha^{6/r}}\left[(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\frac{A(n)^2}{n^2}\right]^4\right\}+R_3+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

即

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\frac{C(n)}{n}>\frac{A(n)}{n}+\frac{1}{2\lambda\alpha^{1/r}}\left\{(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\frac{A(n)^2}{n^2}+\frac{1}{4\lambda^2\alpha^{2/r}}\right.$$
$$\left[(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\frac{A(n)^2}{n^2}\right]^2+\frac{1}{16\lambda^4\alpha^{4/r}}(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\frac{A(n)^2}{n^2}\Big]^3$$
$$\left.+\frac{1}{64\lambda^6\alpha^{1/r}}\left[(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\frac{A(n)^2}{n^2}\right]^4\right\}+R_3+O\left(\frac{1}{n}\right)\qquad(7)$$

在(7)右方，让

$$\frac{A(n)}{n}=x,\quad 2\lambda\alpha^{1/r}=p,\quad (2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}=q$$

则 $p^2-4q>0$，故可用引理5，由于 $\frac{A(n)}{n}>\overline{\alpha}$，故以 $\overline{\alpha}$ 代(7)中的 $\frac{A(u)}{n}$ 后，(7)右方之值变小，所以

$$\frac{C(n)}{n}>\overline{\alpha}+\frac{1}{2\lambda\alpha^{1/r}}\left\{(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\overline{\alpha}^2+\frac{1}{4\lambda^2\alpha^{2/r}}\left[(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\overline{\alpha}^2\right]^2\right.$$
$$+\frac{1}{16\lambda^4\alpha^{4/r}}\left[(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\overline{\alpha}^2\right]^3+\frac{1}{64\lambda^6\alpha^{6/r}}\left.\left[(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\overline{\alpha}^2\right]^4\right\}$$
$$+R^3+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

于是

$$\frac{C(n)}{n}>\alpha+\frac{1}{2\lambda\alpha^{1/r}}\left\{(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\alpha^2+\frac{1}{4\lambda^2\alpha^{2/r}}\left[(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\alpha^2\right]^2\right.$$
$$+\frac{1}{16\lambda^4\alpha^{4/r}}\left[(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\alpha^2\right]^3+\frac{1}{64\lambda^6\alpha^{6/r}}\left[(2-\alpha^{1/r})^{1+1/r}\right.$$
$$\left.\left.-\alpha^2\right]^4\right\}+R+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

即

$$\frac{C(n)}{n}>\alpha\left\{1+\frac{2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r}}{2\lambda}+\frac{\alpha^{1-1/r}(2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r})^2}{8\lambda^3}\right.$$
$$+\frac{(\alpha^{1-1/r})^2(2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r})^3}{32\lambda^5}+\frac{(\alpha^{1-1/r})^3(2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r})^4}{128\lambda^7}\Big\}$$
$$+R+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

于是就得到了(3)。

第二种情况，

$$\frac{A(n)^2}{n^2}\geqslant(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}\qquad(8)$$

我们看到，(8)的右方就是引理2中的 u_r 的 α 倍由引理4，$\alpha u_r\geqslant\alpha^2 v_r$，于是，(8)变成(注意，$C(n)\geqslant A(n)$)

$$\frac{C(n)^2}{n^2}\geqslant\frac{A(n)^2}{n^2}\geqslant\alpha^2 v_r$$

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

将引理3中的v_r的定义代入，双方开方，再注意到$\lambda\geqslant 1$，我们也得到了引理6的结论。

在引理6中，让$n\to\infty$，再考虑ε，η的任意性，就得到了定理1。

2．定理3的证明

引理6′

$$\frac{C(n)}{n}>\alpha\left\{1+\frac{2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r}}{2\lambda}+\frac{\alpha^{1-1/r}(2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r})^2}{8\lambda^3}\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{(\alpha^{1-1/r})^n(2-\alpha^{1/r}-\alpha^{1-1/r})^{n+1}}{(2\lambda)^{2n+1}}+\cdots\right\}+R'+O\left(\frac{1}{n}\right)\qquad(9)$$

证　仍分两种情况讨论：

第一种情况，

$$\frac{A(n)^2}{n^2}>(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}$$

我们仍用引理6中的迭代方法。先将(6)代入(4)右方的平方项，再重复地将(6)代入到所得出的不等式右方的平方项，这样一次一次迭代下去，然后将(5)代入到重复多次的迭代后的不等式右方的平方项，这样重复地一次一次作去，可以得到

$$\frac{C(n)}{n}>\frac{A(n)}{n}+\frac{1}{2\lambda\alpha^{1/r}}\left\{(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\frac{A(n)^2}{n^2}+\frac{1}{4\lambda^2\alpha^{2/r}}\left[(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}\right.\right.$$
$$\left.-\frac{A(n)^2}{n^2}\right]^2+\frac{1}{16\lambda^4\alpha^{4/r}}\left[(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\frac{A(n)^2}{n^2}\right]^3+\frac{1}{64\lambda^6\alpha^{6/r}}$$
$$\cdot\left[(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\frac{A(n)^2}{n^2}\right]^4+\cdots+\frac{2}{(2\lambda\alpha^{1/r})^{2(n-1)}}\left[(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}\right.$$
$$\left.\left.-\frac{A(n)^2}{n^2}\right]^n+\cdots\right\}+R_3{}^1+O\left(\frac{1}{n}\right)\qquad(10)$$

在(10)右方，让$\frac{A(n)}{n}=x$，$2\lambda\alpha^{1/r}=p$，$(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}=q$，

则因$p^2-4q>0$，故可用引理5′，由于$\frac{A(n)}{n}>\bar{\alpha}$，故以$\bar{\alpha}$代(10)中的$\frac{A(n)}{n}$后，(10)右方的值变小，所以

$$\frac{C(n)}{n}>\bar{\alpha}+\frac{1}{2\lambda\alpha^{1/r}}\left\{(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\bar{\alpha}^2+\frac{1}{4\lambda^2\alpha^{2/r}}\left[(2-\alpha^{1/r}\alpha^{1+1/r}\right.\right.$$
$$\left.-\bar{\alpha}^2\right]^2+\frac{1}{16\lambda^4\alpha^{4/r}}(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\bar{\alpha}^2\Big]^3+\frac{1}{64\lambda^6\alpha^{6/r}}\left[(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}\right.$$
$$\left.\left.-\bar{\alpha}^2\right]^4+\cdots+\frac{1}{(2\lambda\alpha^{1/r})^{2(n-1)}}\left[(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}-\bar{\alpha}^2\right]^n+\cdots\right\}+R_4{}^1+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

把$\bar{\alpha}$换成α，其误差并入$R_4{}^1$，再整理得到的结果就得到(9)。

第二种情况

$$\frac{A(n)^2}{n^2}\geqslant(2-\alpha^{1/r})\alpha^{1+1/r}\qquad(11)$$

我们看到，式的右方就是引理2中的u_r的α倍，由引理4′，$\alpha u_r\geqslant\alpha^2 v_r$，于是，(11)变成

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(注意，$C(n)\geqslant A(n)$)

$$\frac{C(n)^2}{n^2}\geqslant\frac{A(n)^2}{n^2}\geqslant\alpha^2\nu_r$$

以引理3′中的ν_r的定义代入，双方开方，再注意到$\lambda\geqslant1$，我们也得到引理6′的结论。

在引理6′中，让$n\to\infty$，再考虑到ε，η的任意性，就得到了定理3。

参　考　文　献

[1] 周伯埙："关于堆垒整数集的密率"，《南京大学学报》，第1期，1955，43—48。

[2] 周伯埙："关于整数和集的渐近密率"，《南京大学学报》，第2期，1962，39—50。

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

87029

判定一般素数的新方法《无锡轻工业学院学报》1987年，第6卷，第3期

主题词 素数；合数；计算机

摘 要 本文提供了一种判定任意数是素数还是合数的新方法，以该方法为数字模型编制的程序可以对单个自然数作出判断，也可以在一个区段内定出全部素数与合数，程序中断后重新启动也不必重复已做过的工作，这些方面都比筛法好。对该方法进行了理论证明，程序运行后取得了很好的成绩。

作者：张遐 蔡松岳

87030

整数和集的渐近密率《无锡轻工业学院学报》1987年，第6卷，第3期

主题词 渐近的；密率；正整数；集合；基底

摘 要 设A和B都是自然数的集合，C是它们的和。A的渐近密率为α。假定B是自然数的一个渐近基底，λ是B的渐近平均阶数。$C = A + B$的渐近密率为γ，得到了用α和λ估计γ的几个定理。

作者：孙子常

87031

试论俄语科技语体词汇的特点《无锡轻工业学院学报》1987年，第6卷，第3期

主题词 俄语；科技；语体；词汇

摘 要 根据俄语科技词汇的特点，结合理工科院校公共俄语的教学经验，以较丰富的词汇论述了科技词汇的特点，本文对理工科院校的学生和科技人员在学习俄语时有较大的实用价值。

作者：黄洽民

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

87031

ON SOME CHARACTERISTICS of RUSSIAN LANGUAGE, ITS STYLISTIC VOCABULARY of SCIENCE and TECHNOLOGY 《Journal of the Wuxi Institute of Light Industry》Vol.6, No.3, 1987

SUBJECTWORDS Russian; Science and technology; Writing style; Vocabulary

ABSTRACT Based on some stylistic russian vocabularies of science and technology, and the writer's own experience in teaching. The present article takes rich vocabulary to deal with some characteristics of the stylistic vocabularies of science and technology, so it has certain value in application for students and personnel of science and engineering in their reading, translating, and memorizing new words.

Author: Huang Qiamin

87029

A NEW METHOD for CHACKING a PRIME《Journal of the Wuxi Institute of Light Industry》Vol.6, No.3, 1987

SUBJECTWORDS Prime; Composite number; Computer

ABSTRACT Until now, sieve of eratosthenes' is still the only method for deciding a natural number to be a prime. Unfortulatly, the checking procedure is too complicate for large numbers. This paper establishes a new method based on a theory discussed here shows that any natural number can be decided to be a prime or composite depends only on a set of eight primitive primes: 1,7,11,13,17,19,23,29. In practice, a PASCAL program based on the modal of this method shows that the new method is surely better than the old sieve method.

Author: Zhang Xia Cai Songyue

87030

ON the ASYMPTOTIC DENSITY of SUM of SETS of POSITIVE INTEGERS《Journal of the Wuxi Institute of Light Industry》Vol.6, No.3, 1987

SUBJECTWORDS Asymptotic; Density; Basis; Positive integer; set

ABSTRACT Suppose that both A and B are sets of natural numbers, and C is their sum. Let α denote the asymptotic density of A. Suppose that B is an asymptotic basis of natural numbers, let λ denote an asymptotic average order of B. let I be the asymptotic density of $C=A+B$. Thus several theorems about estimating I by α and λ are obtained.

Author: Sun Zichang

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net