第4卷 第1期 无锡轻工业学院学报 JOURNAL OF THE WUXI INSTITUTE OF LIGHT INDUSTRY Vol.4 No.1 1985

薄板梁腹板超临界屈曲强度的研究

唐 志 祥

（机 械 系）

本文研究一种估算剪切负载下薄板梁的总屈服负载的简捷方法。所得公式在英国谢菲尔薄大学机械工程系实验室内以小范围的极限负载试验作了验证。

一、概 述

薄板梁的设计有各种标准，例如，在英国有BS449、153、5400，在美国有A.I.S.I.（美国钢铁学会）的规范等等。并且有许多理论方法可以用来计算薄板梁的剪切应力状态，其精确程度是可以接受的。

在设计一种结构时，一般要求在正常的最大负载下不发生塑性流动。可是，由大量的试验数据知道，在初始剪切屈服以后，再有很小的进一步变形时，其承载能力会有明显的增加，一直到开始整体屈服为止。这是一种应急状况时的数值。出现这种承载能力的提高是因为受剪的腹板在屈曲期间发生一个与边缘倾斜的张力场。Basler[1]于1961年清楚地说明了这一点。

把梁的理论和单纯的对角方向张应力理论结合起来，Basler假设大部分梁的边缘挠性相当好，以致它们不能承受倾斜的张力场加于它们的横向负载。并且规定在这种情况下只有当梁的腹板产生一个倾斜屈服带时梁才破坏。（见图1）。

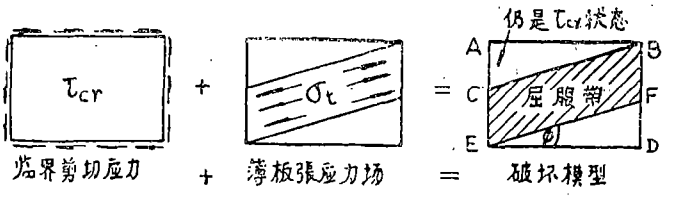


图1 Basler超临界屈曲模型

他还假定在相邻的三角形ABC和三角形DEF中应力仍然等于相应的临界剪切应力τ_{cr}。假设腹板的对角带中屈服的发生是由于张应力σ_t和临界剪应力τ_{cr}在屈服时一起作用的结果。

腹板的极限剪切负载由下式确定：

$$P_u=\left(\tau_{cr}+\frac{\sigma_t}{2\sqrt{1+\alpha^2}}\right)ht \qquad (1)$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

式中

$$\sigma_t = \left(1 - \frac{\tau_{cr}}{\tau_y}\right)\sigma_y \tag{2}$$

临界剪切应力 τ_{cr} 由下式确定：

$$\tau_{cr} = K\frac{\pi^2 E}{12(1-\nu)} \cdot \frac{1}{\beta^2}\ ^{[2]} \tag{3}$$

其中无量纲的屈曲系数对简单支承的矩形薄板可利用下面的公式确定[11]：

$$\left.\begin{aligned} K &= 5.34 + \frac{4}{\alpha^2} \qquad \alpha \geqslant 1.0 \text{ 时} \\ K &= 4 + \frac{5.34}{\alpha^2} \qquad \alpha \leqslant 1.0 \text{ 时} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

利用叠加原理，张应力带内的应力状态(见图 2)，可由方程(5)表示：

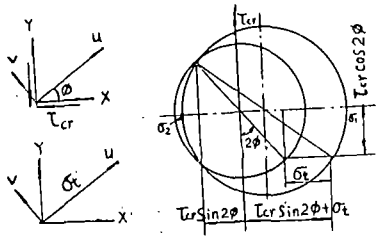


图 2 张力场的应力状态

$$\left.\begin{aligned} \sigma_u &= \tau_{cr}\sin 2\phi + \sigma_t \\ \sigma_v &= -\tau_{cr}\sin 2\phi \\ \tau_{uv} &= \tau_{cr}\cos 2\phi \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

当腹板发生屈服时 σ_t 达到最大值。把上述应力状态放到 Mises 屈服条件中得到 σ_t 的表达式：

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma_y^2 + \tau_{cr}^2\left[\left(\frac{3}{2}\sin 2\phi\right)^2 - 3\right]} - \frac{3}{2}\tau_{cr}\sin 2\phi \tag{6}$$

Basler 还建议，方程(6)在实际应用中，为了方便起见，可以用近似公式(2)代替。

了解到 σ_t 的值随着张力场的倾斜度而变化，并且假设这个场的倾斜度是提供最大的总剪切应力分量的倾斜度以后，Basler 指出以下关系式：

$$\mathrm{tg}\phi = \sqrt{1+\alpha^2} - \alpha \tag{7}$$

一般情况下 ϕ 角等于腹板对角线的倾斜角的一半。但是，后来 Fuju[5] 和 Selberg[6] 指出方程(2)并不代表 σ_t 的正确值，正确值应表示为：

$$\sigma_t = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}+\alpha}\sigma_y\left(1 - \frac{\tau_{cr}}{\tau_y}\right) \tag{8}$$

尽管如此，方程(2)在允许的精度范围内，仍然使数值计算容易得多。

Basler 模型的主要问题是认为三角形 ABC 和三角形 DEF(图 1)始终处于临界剪切应力状态。(由方程(1)可见，他实际上考虑其中的剪切应力为 $\tau_{cr} + \frac{\sigma_t}{2}\cdot\sin 2\phi$)。

1969 年，Chern 和 Ostapenko[7] 提出一个类似的模型。他们考虑到张应力沿整个截面的变化；并且还考虑到，以在边缘形成塑性铰的形式而出现的框架作用，如图 3 所示。

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

Basler理论的另一个问题是忽略了大部分梁的边缘有一定的能力抵抗薄板张应力的横向分力。从事飞机设计的工程师们长期以来认识到这一事实，并且有一些相应的解决方法。

Rockey教授及其研究者们[3,4,8,9]多年来对这个课题进行了研究，并提出了杰出的理论。

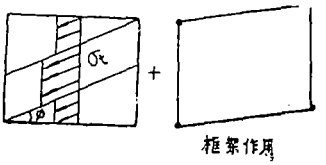


图 3　Cherm 和 Ostapenko 的模型

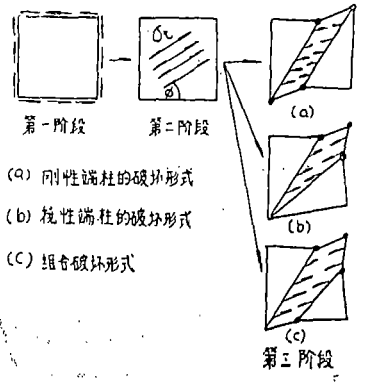


图 4　薄板梁剪切负载的破坏形式

图 4 表示了他们的模型，其中腹板加载过程分成三个阶段：第一阶段在屈曲之前，整个腹板处于均匀纯剪应力下；第二阶段在出现张力场时；第三阶段形成边界内部塑性铰，并在最后破坏。有三种破坏形式：端柱边缘是刚性的；端柱边缘可弯的；及两者组合破坏的形式如图 4 所示。

按照这个模型，各种破坏形式可以用相应的公式计算极限载荷。但是，这些公式的运算比较复杂。

二、改进模型

正如前面讨论的，在张力场产生以后，假设三角形 ABC 和三角 DEF（见图 1）仍然处在临界剪切应力 τ_{cr} 作用下是不合理的。如果 Basler的假设是正确的，则沿着张力带和纯剪三角形的交接线 BC 和 EF 应该产生滑移。而事实并非如此。因而提出一个改进模型(图 5)。

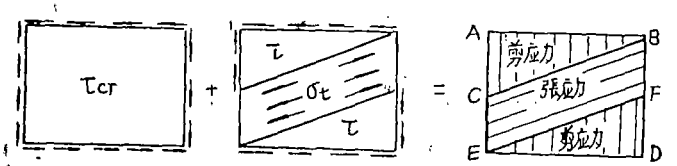


图 5　改进模型

对于较小的三角形 ABC 和三角形DEF，显然可以承受较大的剪切应力而不发生屈曲。其中的应力状态可能很复杂，但是沿着三角形边界的剪应力可以求得。

首先让我们观察张力场，沿着 BC 方向的应变为：

$$\varepsilon_u = \frac{1}{E}(\sigma_u - \nu\sigma_v) \qquad (9)$$

把方程(5)代入(9)式得

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\varepsilon_u = \frac{1+\nu}{E}\tau_{cr}\sin 2\phi + \frac{1}{E}\sigma_t \tag{10}$$

假如沿着三角形边界BC仍然是纯剪状态，其应力为τ_{xy1}，则应力状态将是

$$\left.\begin{aligned}\sigma_u' &= \tau_{xy1}\sin 2\phi \\ \sigma_v' &= -\tau_{xy1}\sin 2\phi \\ \tau_{uv} &= \tau_{xy1}\cos 2\phi\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

如前面方法，应变为

$$\varepsilon_u' = \frac{1+\nu}{E}\tau_{xy1}\sin 2\phi \tag{12}$$

根据边界BC和EF的变形条件，即ε_u应等于ε_u'，结果为

$$\tau_{xy1} = \tau_{cr}\frac{1}{(1+\nu)\sin 2\phi}\sigma_t \tag{13}$$

如果三角形ABC的AB边剪切应力为τ_{xy2}，则其必等于沿着BF边的剪切应力τ_{BF}，即

$$\text{或}\quad \left.\begin{aligned}\tau_{BF} &= \tau_{cr} + \tfrac{1}{2}\sigma_t \cdot \sin 2\phi \\ \tau_{xy2} &= \tau_{cr} + \tfrac{1}{2}\sigma_t \sin 2\phi\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

由此可见，在张力场以外假设的纯剪区域内，剪应力在两个不同区域的交界BC处的τ_{xy1}和另外两边AB或DE处的τ_{xy2}之间变化。

取精度允许的线性变化规律，并且用平均值代替可变剪应力值，则极限负载可由下式计算：

$$P_u = \tau_{BF}\cdot\overline{BF}\cdot t + \frac{\tau_{xy1}+\tau_{xy2}}{2}\cdot\overline{FD}\cdot t \tag{15}$$

注意到$\overline{BF} = h - L\mathrm{tg}\phi$和$\overline{FD} = L\mathrm{tg}\phi$，并且把方程(13)和(14)代入(15)式，可以导出

$$P_u = \tau_u \cdot ht \tag{16}$$

τ_u是当量极限剪应力，由下式给定：

$$\tau_u = \tau_{cr} + K_t\cdot\sigma_u \tag{17}$$

其中

$$K_t = \frac{1}{2}\left[\frac{1+K_a}{2\sqrt{1+\alpha^2}} + \frac{\alpha K_a}{1+\nu}\right] \tag{18}$$

而面积比：

$$K_a = 1 + \alpha^2 - \alpha\sqrt{1+\alpha^2} \tag{19}$$

由于$K_t\sigma_t$代表张力场薄板应力引起的当量极限剪应力的分量，所以K_t可以称为张力模型系数，并且表示于表1和画成曲线于图6。

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

表 1　$\sqrt{1+\alpha^2}$，K_a 和 K_t 的值　($\nu=0.3$)

α	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.2	1.5	1.8	2.0	2.5	3.0
$\sqrt{1+\alpha^2}$	1.077	1.118	1.166	1.281	1.414	1.562	1.803	2.059	2.236	2.693	3.162
K_a	0.729	0.691	0.660	0.616	0.586	0.566	0.546	0.534	0.528	0.518	0.513
K_t	0.514	0.511	0.508	0.505	0.506	0.512	0.529	0.556	0.577	0.639	0.712

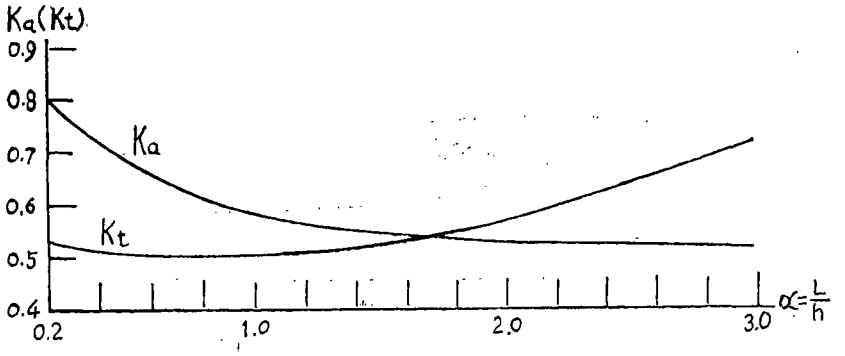


图 6　K_t 和 K_a 随长宽比 α 的变化曲线

根据方程(17)计算的腹板当量极限应力值，相对长宽比 α 的曲线画于图 7 和图 8。它们的屈服应力 σ_y 分别为 400N/mm² 和 230N/mm²。

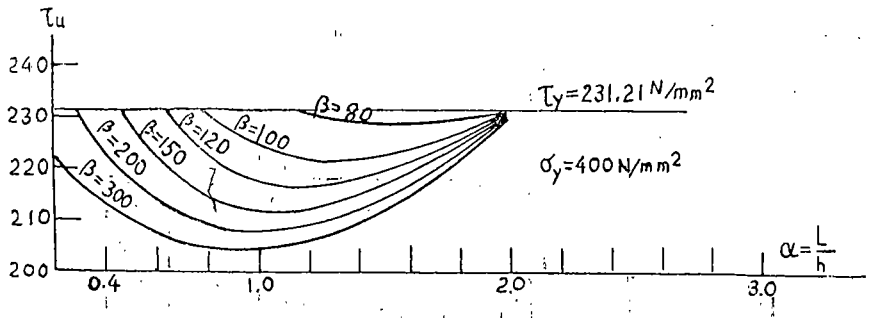


图 7　$\sigma_y=400\text{N/mm}^2$ 时 τ_u 和 α 的关系

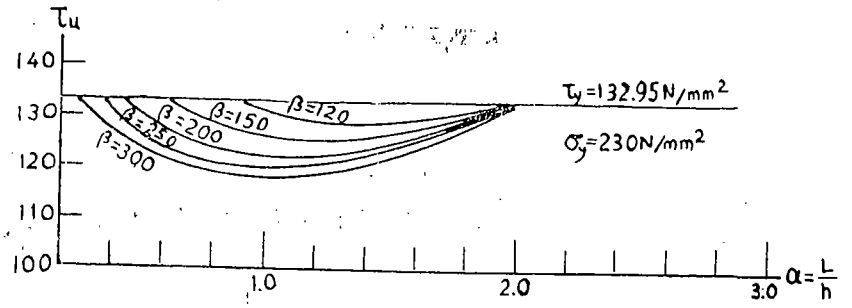


图 8　$\sigma_y=230\text{N/mm}^2$ 时 τ_u 和 α 的关系

当量极限剪应力大于材料的屈服剪应力是不可能的，所以当 τ_u 值大于 τ_y 时的所有曲线

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

全部省略掉。有趣的是当长宽比α大于2时，当量极限剪应力可以用τ_y来代替。因此，极限负载变为

$$P_u = \tau_y \cdot h \cdot t \tag{20}$$

此外，如果腹板的宽厚比小于一定的数值，例如$\sigma_y = 400N/mm^2$的材料，$\beta < 80$ $\sigma_y = 230N/mm^2$的材料，$\beta < 100$，则极限负载也可以用(20)式计算。

还可看到α和β处于某种关系时，腹板会有一最小承载能力，α和β的这种关系示于图9。所以，为了避免这种状态，腹板的比例应偏离α和β的上述相关处。

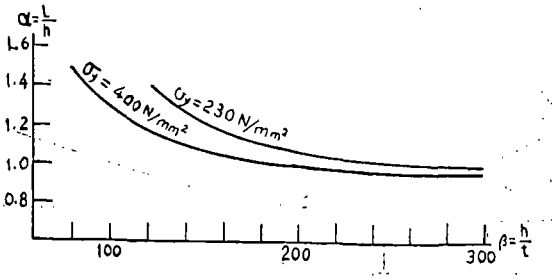


图9 最小负载能力时α和β的相关曲线

三、试验研究

试验研究是为了提供证据与改进模型的计算结果相比较。

试验方案，包括一个用普通角钢制成的可分离的框架和试验薄板。具体设计示于图10。

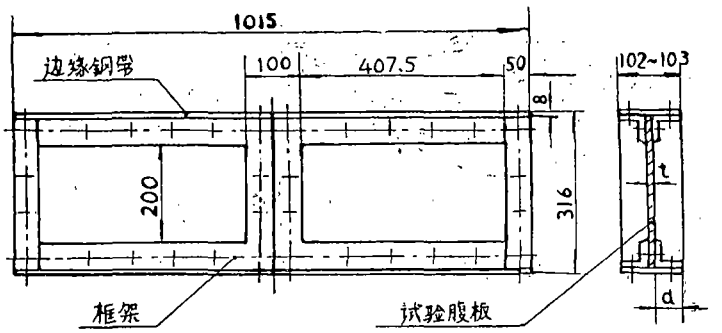


图10 试验框架和试验板的组装图

梁架夹具是由两个框架和两条作边缘用的带钢组成。前者用角铁焊成。试验腹板放在两框架之间，并且在顶面和底面分别放上两条边缘带钢。整个装配件用M8的螺钉联成一体。

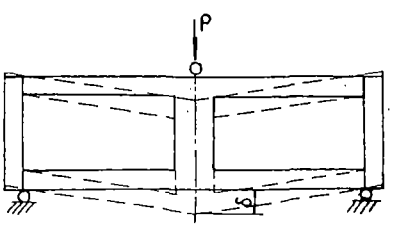


图11 加载方式

梁的简单支承在两个端部，中间加载(见图11)。每次试验加载一步一步地进行，并且在某些负载时拍摄5～7张照片，(1张在加载之前，2～4张在屈服点左右，还有一张在卸载后)。详细过程如下：

① 将试验腹板固定在梁架上

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

② 将固定的腹板漆成黑色，并用白线画成小方格

③ 测量小方格结点的深度(见图10)

④ 把该组装件安装到试验机上

⑤ 进行试验，同时摄下 5～7 张照片，机器自动记录 P—δ 曲线。图 12 是根据机器的原始记录复制的 P—δ 曲线之一。所摄下的照片图例示于图13和14。

⑥ 从组件上取下试验腹板，并保存起来

⑦ 校直梁架，同时记录下校直时所需要的负载(见附言)

⑧ 试验架的塑性铰区域进行退火处理，退火温度在 400℃ 左右，并且检查焊接缝，如有裂纹出现，则需补焊。

此时，梁架可以安装下一个试验腹板。所用的试验梁及腹板，都由英国谢菲尔德大学机械工程系的机械厂制造。

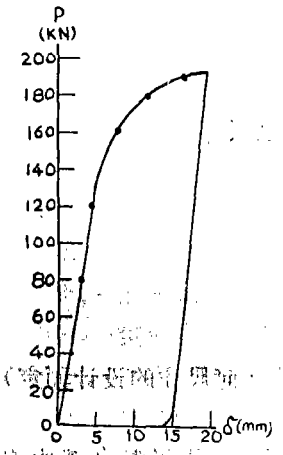
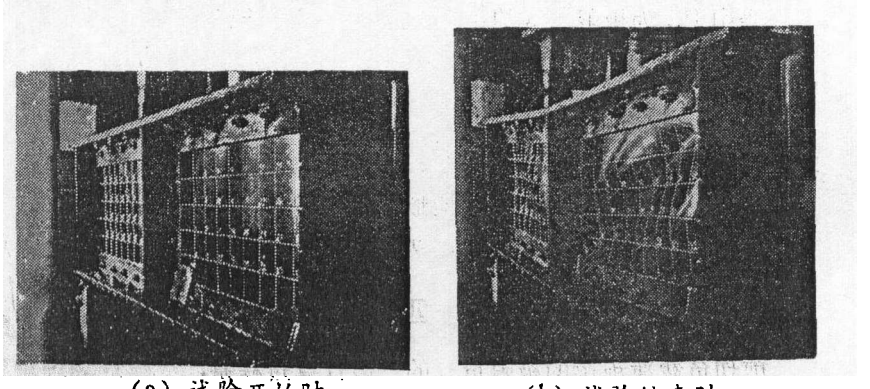


图 12　1 号试验梁的负载 P 和变形 δ 的曲线



(a) 试验开始时　　(b) 试验结束时

图 13　2 号试验

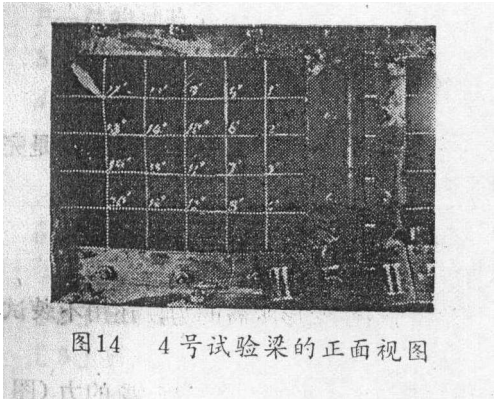


图14　4 号试验梁的正面视图

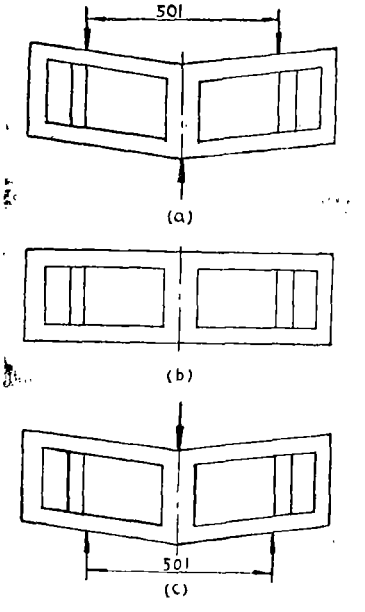


图15　空梁架试验过程　(a)校直试验过的空梁架 (b)退火 (c)正常位置时加载试验

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

试验腹板的试验结果以及理论计算值均列于表2。

表 2 实验数据和计算数据

腹板序号	L (mm)	H (mm)	t (mm)	$\alpha=\frac{L}{H}$	$\beta=\frac{H}{t}$	K_t 方程(18)	τ_u 方程(3) (N/mm²)	σ_y (N/mm²)	$\tau_y=\sigma_y/\sqrt{3}$	σ_t 方程(2) (N/mm²)	P_{th} 方程(16)(20) (KN)	P_{ex} (KN)	$\frac{P_{th}}{P_{ex}}$
1	407.5	200	2±·1	2.04	100	0.58	113.08	230	132.95	34.38	53.18	51.5	1.04
2	407.5	200	3±·1	2.04	66.7	0.58	254.17	230	132.95	--	79.77	78.0	1.02
3	407.5	200	1.2±·1	2.04	166.7	0.58	40.67	230	132.95	162.64	31.91	31.5	1.01
4	250.5	200	1.2±·1	1.25	166.7	0.51	50.01	230	132.95	144.75	29.96	30.0	0.99

表中 P_{ex} 为极限负载的试验结果，由下式计算：

$$P_{ex}=\frac{1}{2}(P_t-P_p)$$

式中 P_t—总的极限负载，直接由机器的自动记录图(如图12)上获得

P_p—使梁架塑性变形所需的负载

比较试验结果与理论计算，两者是相当符合的。

四、计算过程的概括

剪切负载薄板梁的极限负载的一般计算过程是：

① 首先计算长宽比 α 和宽厚比 β (腹板的长度、宽度、厚度由其几何尺寸的设计而定)

② 用方程(3)和(4)计算临界应力 τ_{cr}

③ 如果 τ_{cr} 大于腹板材料的 τ_y 或长宽比 α 大于 2，或宽厚比小于80，则极限负载由方程(20)确定

④ 如果 τ_{cr} 小于腹板材料的 τ_y，则应该用方程(2)计算张力场中的薄板应力

⑤ 用方程(18)和(19)，或表1，或图6，确定面积比 K_a 和张应力模型系数 K_t

⑥ 用方程(16)和(17)计算极限负载

⑦ 若对结果不满意，则改变设计数据再计算

五、结 论

用一个张力场加上两个剪力场的数学模型，计算螺钉装配的试验梁的屈服负载，是完全适用的。

六、附 言

为了肯定校直试验所需的力，能近似地作为梁架达到塑性变形所需的力，还用不装试验腹板的梁架做了另一个试验。

由于事先的屈曲试验梁已变形，所以首先校直已变形的空梁，记录下所需的力(图15(a))。

把已校直的梁在400℃左右退火处理，以消除内应力。

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

如进行腹板试验一样，对空梁进行加载试验(应与腹板试验的支承跨距、加载位置和变形相同)。

所用支承跨距为 501 毫米。试验结果如下：

校直力	132KN
重新变形力	129KN
误差	2.5%

符 号 说 明

L—薄板梁的腹板长度

h—薄板梁的腹板宽度

t—薄板梁的腹板厚度

α—腹板的长宽比，　$\alpha = \frac{L}{h}$

β—腹板的宽厚比，　$\beta = \frac{h}{t}$

ϕ—张力场的倾角

K_a—面积比(张力场的面积和整个腹板面积之比)

K_t—张应力模型系数

K_τ—屈曲系数

σ_y—腹板材料的屈服应力

τ_y—腹板材料的剪切屈服应力

τ_{cr}—临界剪切应力

τ_u—当量极限剪切应力

σ_t—张力场中薄板张应力

P_u—剪切负载薄板的极限负载

e—应变

E—腹板材料的杨氏弹性模量

ν—波桑系数 = 0.3

P—总的试验负载

δ—试验期间加载处梁的横向变形量

d—腹板上测试用方格线结点的深度(见图10)

参　考　文　献

[1] Basler, K. "Strength of plate girders in shear," Journal of the structural Division, ASCE, proc. No.2967, ST7, pp.151—180, Octorber1961

[2] Stephen P. timoshanko. "Theory of elestic stability."

[3] Huslid, J. M. and Rockey, K. C. "The influence of end post rigidity on the collapse behaviour of plate girders," Proc. Instn. Civ. Engr, part2, 1979, 67, June, 285—312.

[4] Porter, D. M., Rockey, K. C. and Evans, H. R. "The collapse behaviour

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

of plate girders loaded in shear," Struc. Eng. Aug. 1975, No. 8, Vol. 53 313—325

[5] Fuju, Tokio. "On an improved theory for Dr. Basler's theory," Proc. 8th Congress, IABSE, NewYork, September 1968, pp.477—487

[6] Selberg, A. "On the shear capacity of girder web," University of Trondheim, 1973

[7] Chern, C. and Ostapenko, A. "Ultimate strength of plate girders under shear," Fritz Engineering Laboratory Report No. 328.7 Lehigh University, U.S.A. August 1969

[8] Cook, I. T. and Rockey, K. C. "Shear buckling of rectangular plates with mixed boundary conditions," Aeronautical Quarterly, Vo.XIII p.41, Feb.1962

[9] Rockey, K. C. and Skaloud, M. "The ultimate load behaviours of plate girders loaded in shear," Struct. Engr. 1972, 50. No.1, Jan. 29—48

[10] Djubek, J. and Skaloud, M. "Post-buckled behaviour of web plates in the new edition of Czechoslovak Design specifications steel plated struct." pp.404—420

[11] F. Bleich, "Buckling strength of metal structures," Mcgraw-Hillbook co., New York, 1952

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net