

文章编号: 1009-038X(2000)06-0623-03

极坐标系边界权残法求解二维温度场问题

范本隽, 沈培玉

(无锡轻工大学机械工程学院, 江苏无锡 214036)

摘要: 推导了在极坐标系中用加权残数法中的边界最小二乘法求解二维稳态温度场的计算公式, 在此基础上编制了计算机程序. 算例表明边界权残法具有可用的精度, 且比差分法快捷得多.

关键词: 温度场; 加权残数法; 边界法

中图分类号: O241.5

文献标识码: A

An Investigation on Solving 2-dimensional Temperature Field Problems by Using Boundary LSR Method with Polar Coordinates

FAN Ben-jun, SHEN Pei-yu

(School of Mechanical Engineering Wuxi University of Light Industry, Wuxi 214036)

Abstract: The method to analyse 2-dimensional temperature fields based on boundary least square residuals is studied. A computer program is made according to the method. Two examples show that this method has available accuracy, which needs far less data preparation work than the finite difference method.

Key words: temperature field; weighted residuals method; boundary method

在热机、制冷工程、化学反应器以及大体积混凝土工程等工程问题中广泛存在着温度场计算的问题. 确定所设计的结构在某一时段内的温度分布, 对于计算热应力、工作状态、化学反应状态等是必不可少的. 如该时段相对较长且温度随时间变化不大, 则可视为稳定温度场问题. 该类问题的求解的本质是在一定的边界条件下求解泊松方程, 但对于二维以及二维以上问题寻求解析解一般是不现实的. 目前在工程中主要使用差分法、有限元法等数值方法求解^[1], 这两种方法都需要在整个求解域中划分网格, 因而输入数据工作量大, 差分法还存在对不规则边界要作较为复杂的预处理的麻烦. 加

权残数法作为不同于上述两种方法的另一种求解微分方程的思路, 首先是在力学计算中提出并应用, 随后有研究者将其用于计算温度场问题^[2]. 该法具有原理简明, 程序简短, 数据准备工作量小的特点, 但由于研究尚不透彻, 尚未像差分法和有限元法那样为工程界所普遍接受; 同时该方法的具体实施又有全域法、边界法、内部法、子域法等多种方案, 试函数的选取也各不相同, 故作进一步的研究以开发其工程应用价值是有必要的.

本研究探讨加权残数法中的边界法(简称边界权残法), 并选用极坐标系中的解系列构造试函数.

收稿日期: 2000-03-14; 修订日期: 2000-09-17.

作者简介: 范本隽(1947-), 男, 江苏苏州人, 工学硕士, 副教授.

1 边界权残法原理

1.1 控制方程与定解条件

二维稳态温度场问题的数学提法为: 寻求坐标的函数 T , 使在域 Ω 内满足微分方程

$$\Delta T + q = 0. \tag{1}$$

在边界 S_1 (已知温度的边界) 上满足

$$T = T_0 \tag{2a}$$

在边界 S_2 (热传导边界) 上满足

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = F_0 \tag{2b}$$

在边界 S_3 (热交换边界) 上满足

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T - T_\infty) \tag{2c}$$

式中, Δ 为拉普拉斯微分算符, 在直角坐标系中 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, 在极坐标系中 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$, q 为内热源强度, $\frac{\partial}{\partial n}$ 为对边界外法线求方向导数, λ 为热传导系数, α 为表面的热交换系数, T_∞ 为环境(或热交换介质)的温度, T_0, F_0 为坐标的已知函数, 求解域及三类边界见图 1.

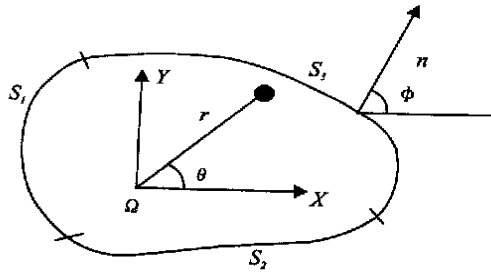


图 1 求解域及三类边界

Fig. 1 The solving region and three kinds of boundaries

1.2 边界权残法求解思想

如能找到微分方程(1)的满足边界条件(2)的准确解 T , 则代入上述各方程后均应满足. 如无法找到准确解 T , 则先构造一满足微分方程(1)的试函数 $\hat{T}$, 内含若干待定参数, 将 $\hat{T}$ 代入边界条件(2)中一般会产生边界残差. 调整各待定参数使残差尽可能小从而得到该问题的近似解函数.

2 极坐标系中泊松方程的试函数和边界残差

极坐标系中, 微分方程(1)的具体形式为:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + q = 0 \tag{3}$$

其通解 $T = \bar{T} + T^*$, $\bar{T}$ 为齐次解, T^* 为一个非齐

次方程特解. 可证明当 Ω 为单链通域且极点 O 位于域内部时, 齐次解的分离变量型基本解集为:

$$\{1, r^k \cos k\theta, r^k \sin k\theta\} (k=1, 2, 3, \dots)$$

而当 q 为常数时, 非齐次特解可取为:

$$T^* = (1 + \frac{q}{4\lambda})r^2 \cos 2\theta - \frac{q}{4\lambda}r^2.$$

故设试函数

$$\hat{T} = \sum_{k=0}^N a_k r^k \cos k\theta + \sum_{k=1}^n b_k r^k \sin k\theta +$$

$$(1 + \frac{q}{4\lambda})r^2 \cos 2\theta - \frac{q}{4\lambda}r^2 \tag{4}$$

式中 a_k, b_k 为待定的系数, N 为所取级数的项数. 该试函数已满足微分方程(1), 但尚未满足边界条件.

在域 Ω 的边界 S 上取 m 个点 ($m \geq 2N+1$), 在这 m 个点上将试函数按边界的性质逐一代入边界条件式(2a)、式(2b)、式(2c)之一, 得 m 个残差 R_i ($i=1, 2, \dots, m$), 它们是待定系数 a_k, b_k 的函数. 记方差泛函 $\Pi = \sum R_i^2$, 它必有极小值, 极小值条件为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a_k} &= 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots, N) \\ \frac{\partial \Pi}{\partial b_k} &= 0 \quad (k=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \tag{5}$$

由此得到 $2N+1$ 个代数方程(最小二乘方程), 以求解 $a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N$.

经推导, 当 $q=0$ 时, 边界残差的表达式为

$$\begin{aligned} S_1 \text{ 上: } R &= \sum_{k=0}^N a_k r^k \cos k\theta + \sum_{k=1}^N b_k r^k \sin k\theta - T_0 \\ S_2 \text{ 上: } R &= \sum_{k=1}^N a_k r^{k-1} \cos [(k-1)\theta + \phi] + \sum_{k=1}^N b_k r^{k-1} \sin [(k-1)\theta + \phi] + F_0/\lambda \\ S_3 \text{ 上: } R &= \sum_{k=1}^N a_k r^{k-1} [k \cos (k-1)\theta + \phi] + \frac{\alpha}{\lambda} r \cos k\theta + \sum_{k=1}^N b_k r^{k-1} [k \sin (k-1)\theta + \phi] + \frac{\alpha}{\lambda} r \cos k\theta + \frac{\alpha}{\lambda} a_0 - \frac{\alpha}{\lambda} T_\infty \end{aligned} \tag{6}$$

式中 ϕ 为边界外法线对 x 轴倾角.

3 最小二乘法求解程序

将式(6)改写成

$$\{R\} = [P] \{x\} - \{U\} \tag{7}$$

式中 $\{x\} = [a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N]^T$, $[P]$ 为坐标函数矩阵, $\{U\}$ 为常数向量, 按式(5)进行运算后得到方程:

$$[P]^T [P] \{x\} = [P]^T \{U\}.$$

解出 $\{x\}$ 即 $a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N$ 代入式

(4) 可计算任意点的温度.

4 算 例

4.1 算例 1

有内热源(q =常数)的长圆柱, 见图 2. 设 $a=70\text{ W}/(\text{m}^2\cdot^\circ\text{C})$, $\lambda=10\text{ W}/(\text{m}^2\cdot^\circ\text{C})$, $q=10\,000\text{ W}/\text{m}^2$, $T_\infty=0\text{ }^\circ\text{C}$, $r=1\text{ m}$.

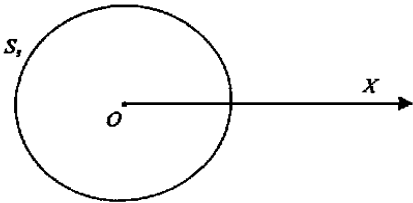


图 2 有内热源的长圆柱

Fig. 2 The long cylinder with inner heat source

本题是一维问题, 有解析解 $T(r)=250(1.286-r^2)$. 现按二维问题计算以考核本研究的方法. 在边界上配置 18 个点, 取 $N=5$, 计算机输出的结果与解析解比较见表 1.

表 1 长圆柱的计算结果

Tab. 1 The results of the long cylinder		
r/m	$T(\text{权残法})/^\circ\text{C}$	$T(\text{解析解})/^\circ\text{C}$
0.0	321.5	321.4
0.1	319.0	318.9
0.2	311.5	311.4
0.3	299.0	298.9
0.4	281.5	281.4
0.5	259.0	258.9
0.6	231.5	231.4
0.7	199.0	198.9
0.8	161.5	161.4
0.9	119.0	118.9
1.0	71.5	71.4

4.2 算例 2

设有一正方形长柱体, 侧面和顶面分别保持 $100, 500\text{ }^\circ\text{C}$, 其余两面暴露在对流环境中, 见图 3.

正方形边长 1 m , $\lambda=10\text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$, $a=10\text{ W}/(\text{m}^2\cdot^\circ\text{C})$, 环境温度 $T_\infty=100\text{ }^\circ\text{C}$, 求其内部温度分布.

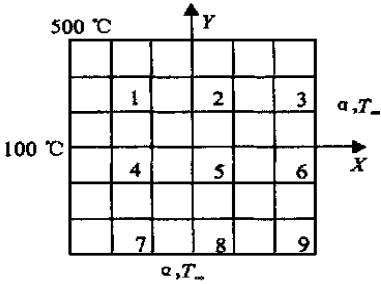


图 3 正方形柱体

Fig. 3 The long square rod

在 4 条边界上等间距设置 24 个边界点, 用权残法计算点 1 至点 9 处的温度值. 由于无解析解, 用差分法(6×6 网格)计算结果作比较, 列于表 2.

表 2 正方形长柱体计算结果

Tab. 2 The results of the long square rod

点号	$T(\text{权残法})/^\circ\text{C}$	$T(\text{差分法})/^\circ\text{C}$
1	280.5	278.9
2	337.8	329.7
3	328.7	303.7
4	181.2	184.4
5	226.4	226.1
6	224.9	213.3
7	130.2	142.0
8	151.4	178.0
9	166.3	171.6

5 讨 论

边界权残法权需输入边界上若干点的数据, 对不规则边界也不需要作特别处理, 因此数据准备工作量大大少于差分法.

与差分解比较, 例 2 中有些点计算值很接近, 有些点计算值误差相对大些, 其原因有待进一步探讨. 此外, 权残法用于三维问题以及瞬态温度场分析也有待进一步研究.

参考文献

[1] 屠传经, 沈珞婵, 吴子静. 热传导[M]. 北京: 高等教育出版社, 1992.
[2] 徐次达. 加权残值法 1986~1989 国内外进展概况及展望[J]. 计算结构力学及其应, 1991, (2): 217~222.

(责任编辑: 李春丽)