

文章编号 :1009-038X(2000)03-0302-03

关于细长扩展梁问题的有限元法*

章迪平¹, 潘士远²

(1. 杭州应用工程技术学院基础部, 杭州 310012; 2. 浙江大学, 浙江杭州 310028)

摘 要: 分析了奇异摄动两点边值细长扩展梁问题的一种有限元方法, 并获得了收敛定理。

关键词: 细长扩展梁; 有限元方法; 收敛

中图分类号: O241.81 **文献标识码**: A

The Finite Element Method for Long Thin Extensible Beams

ZHANG Di-ping¹, PAN Shi-yuan²

(1. Department of Basic Courses, Hangzhou Institute of Applied Engineering, Hangzhou 310012; 2. Zhejiang University, Hangzhou 310028)

Abstract: A finite element method for long thin extensible beams was investigated in this paper, and a convergence theorem is obtained.

Key words: long thin extensible beams; finite element method; convergence

文献 [1] 讨论了下面细长扩展梁问题的一种有限元解法

CL 问题:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 y^{(4)} - (a(x)y')' + b(x)y' = f(x) & 0 < x < 1 \\ y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

SS 问题:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 y^{(4)} - (a(x)y')' + b(x)y' = f(x) & 0 < x < 1 \\ y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中 $b(x) = a'(x)$, $-b'(x) = a''(x) \geq 0$ 且 $0 \leq a_0 \leq a(x) \leq a_1$, $0 \leq x \leq 1$. 当 $\varepsilon \ll h$ 时, 得到不同的误差估计:

对 CL 问题 $\sqrt{h} \| (y - y_h)' \|_0 + \| y - y_{h0} \|_0 \leq C_1 h +$

$$C_2 \varepsilon + C_3 \frac{\varepsilon}{h},$$

对 SS 问题 $h \| (y - y_h)' \|_0 + \| y - y_{h0} \|_0 \leq C_1 h^{2+m}$

$$+ C_2 \varepsilon + C_3 \frac{\varepsilon}{h},$$

其中 y_h 是原问题的有限元解. 结果表明: 用上述有限元法求两问题的近似解时, 得到的数值解会出现“locking”, 且 CL 问题的数值解出现“locking”现象要比 SS 问题的数值解出现的“locking”现象严重.

作者在同一条件下, 对 CL 问题及 SS 问题给出另一种有限元解, 所得结果优于文献 [1] 的结果.

1 准备工作

记 $\Omega = [0, 1]$ 在 $L^2(\Omega)$ 中定义内积:

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

在 Sobolev 空间 $H^k(\Omega)$ 中定义范数和半范数:

$$\|g\|_{k, \Omega} = \left[\sum_{m=0}^k \|D^m g\|_{0, \Omega}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{和} \quad |g|_{k, \Omega} = \|D^k g\|_{0, \Omega}.$$

* 收稿日期: 1999-10-18; 修订日期: 2000-03-10.

作者简介: 章迪平 (1966 年 3 月生), 男, 浙江诸暨人, 理学硕士, 讲师.

$H_0^k(\Omega)$ 表示 $H^k(\Omega)$ 在 Sobolev 范数意义下 $C_0^\infty(\Omega)$ 的完备函数空间.

为了书写方便,若 $\Omega=[0,1]$,则在后面省略区域下标 Ω .

(1)与(2)的变分问题为求 $y\in\overline{H}(0,1)$,使得 $B_\epsilon(y,v)=\epsilon^2(y'',v'')+(ay',v')+(by',v)=(f,v),\forall v\in\overline{H}(0,1)$ (3)

对于 CL 问题 $\overline{H}(0,1)=H^2(0,1)$,对于 SS 问题 $\overline{H}(0,1)=H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)$.于是,由 Lax - Milgrax 引理^[2]知(3)存在唯一解.

现在考虑(3)的有限元解法.给定 $[0,1]$ 的一个网格剖分 $\Delta_h=\{0=x_0, x_1, \dots, x_N=1\}$,记 $h=\max|x_{k+1}-x_k|$,设 $\{\Delta_h\}$ 为一拟一致网格族,即存在一个与 h 无关的常数 K ,使得对任意剖分 Δ_h ,有

$$\frac{h}{x_{k+1}-x_k}\leqslant K, k=0,1,2,\dots,N-1$$
用 $S^h(0,1)$ 表示 Δ_h 上的分段三次 Hermite 函数空间,对 $\Omega_1\subseteq[0,1]$,定义局部逼近空间 $S^h(\Omega_1)$ 是由 $S^h(0,1)$ 中在 Ω_1 上紧支撑的函数所构成的函数空间,对任一 $v\in H^s(0,1)$,存在一个函数 $\Pi_h v\in S^h(\overline{\Omega_1})$,使得^[3]

$$\|v-\Pi_h v\|_{K,\Omega_1}\leqslant Ch^{s-k}|v|_{s,\overline{\Omega_1}} \quad (4)$$
其中 $k=0,1,2, \quad 0\leqslant k\leqslant S\leqslant\min(4,m)$.

相应于(3)的有限元问题为求 $y_h\in\overline{S_1^h}(0,1)$,使得

$$B_\epsilon(y_h,\psi),\forall \psi\in\overline{S_1^h}(0,1) \quad (5)$$
(1)与(2)的简化问题是
$$\begin{cases} -(ay_0')'+by_0'=f(x) & 0<x<1 \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases} \quad (6)$$

对应于(6)的变分问题为求 $y_0\in H_0^1(0,1)$,使得

$$B_0(y_0,\Psi)=(ay_0',\Psi')+(by_0',\Psi')=(f,\Psi),\forall \Psi\in H_0^1(0,1) \quad (7)$$

若 $f\in L^2(0,1)$,标准转换定理表明 $y_0\in H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)$,设 y 是 CL 问题或 SS 问题的准确解,则^[4]

$$\|y-y_0\|_1\leqslant C_\epsilon \quad (8)$$

2 主要结果

设 $y_0\in\overline{S_2^h}(0,1)$, y_0^h 为 y_0 有限元解.

$$B_0(y_0^h,\varphi)=(f,\varphi),\forall \varphi\in\overline{S_0^h}(0,1) \quad (9)$$

又令 y 是(3)的解,则

$$\|y-y_0^h\|_k\leqslant\|y-y_0\|_k+\|y_0-y_0^h\|_k\leqslant$$

万方数据

$$C_1\epsilon+\|y_0-y_0^h\|_k, k=0,1 \quad (10)$$

取 y_0 的有限元空间 $\overline{S_2^h}(0,1)\subset H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)$.于是有以下的定理:

定理 1 设 y 是(3)的解, $f\in H^m(0,1), m=0,1,2, y_0^h$ 是(9)的解,其中 $\overline{S_0^h}(0,1)\subset H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)$,则

$$h\| (y-y_0^h)' \|_0+\|(y-y_0^h)\|_0\leqslant C_1h^{2+m}+C_2\epsilon \quad (11)$$

证 假设 y_0 为简化问题(6)的解, y_0^h 是(9)的解,则

$$B_0(y_0-y_0^h,\chi)=0,\forall \chi\in\overline{S_0^h}(0,1)$$
由 Cea 引理^[2]得
$$\|(y_0-y_0^h)\|_0\leqslant C\inf_{\chi\in\overline{S_0^h}(0,1)}\{\|(y_0-\chi)\|_0\} \quad (12)$$

使用标准误差分析技术^[3],可以直接得到
$$h\| (y_0-y_0^h)' \|_0+\|y_0-y_0^h\|\leqslant Ch\inf_{\chi\in\overline{S_0^h}(0,1)}\{\|(y_0-\chi)\|_0\} \quad (13)$$

注意到 $y_0\in H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)$,利用(4),则
$$\inf_{\chi\in\overline{S_0^h}(0,1)}\{\|(y_0-\chi)\|_0\}\leqslant Ch^{s-1}|y_0|_s, S=1,2,\dots,\min(4,m+2) \quad (14)$$

取 $S=m+2$ (因 $m+2\leqslant 4$),则由(12),(14)知
$$h\| (y_0-y_0^h)' \|_0\leqslant Ch\inf_{\chi\in\overline{S_0^h}(0,1)}\{\|(y_0-\chi)\|_0\}\leqslant$$

$$Ch^{m+2}|y_0|_{m+2}\leqslant Ch^{m+2}|f|_m \quad (15)$$

现考虑如下问题:求 $\varphi\in\overline{H}(0,1)\subset H_0^1(0,1)$,使得

$$B_0(\varphi,\chi)=(y_0-y_0^h),\forall \chi\in\overline{H}(0,1)$$

由于 $(y_0-y_0^h,y_0-y_0^h)=B_0(\varphi,y_0-y_0^h)=B_0(\varphi-\Pi_h\varphi,y_0-y_0^h)\leqslant M\|\varphi-\Pi_h\varphi\|_1\|y_0-y_0^h\|_1\leqslant \overline{M}\|(\varphi-\Pi_h\varphi)\|_0\|(y_0-y_0^h)\|_0\leqslant \overline{M}h\|\varphi\|_2h^{m+1}|f|_m\leqslant \overline{M}h^{m+2}\|y_0-y_0^h\|_0\|f\|_m$

因此,有
$$\|y_0-y_0^h\|_0\leqslant Ch^{m+2}\|f\|_m \quad (17)$$

结合(15)与(17),得
$$h\| (y_0-y_0^h)' \|_0+\|y_0-y_0^h\|_0\leqslant Ch^{m+2}\|f\|_m, m=0,1,2 \quad (18)$$

再利用(10),就可得到(11).

定理证毕.

(上接第 303 页)

3 结 语

定理 1 表明,CL 问题和 SS 问题的准确解同样

能较好地数值逼近,从而较好地解决了文[1]中求解 CL 问题时出现的“locking”现象.

参考文献

- [1] BILL Semper. Locking in finite - element approximations to long thin extensible beams[J]. **IMA J Numer Anal**, 1993 (14) 97 ~109
- [2] CIARLET P G. The finite element method for elliptic problems[M]. North - Holland : Amsterdam ,1978.
- [3] CIARLET P G. Handbook of Numerical Analysis , Vol. II :Finite Element (Part I) [M]. North - Holland : Amsterdam ,1991.
- [4] SMITH D R. Singular Perturbation Theory :An Introduction with Applications [M]. Cambridge : Cambridge University Press , 1985.

(责任编辑 朱 明)