

二元 Taylor 公式的扩充

费荣昌 黄文华

(基础课部)

摘要 把文献[1]和[2]的结果推广到二元函数,从而扩充了二元 Taylor 公式。

关键词 二元 Taylor 公式; 余项的中值; 逼近

0 引言

记

$$p_{n-1}(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

如果用

$$p_{n-1}(x) + f^{(n)}\left(\frac{x}{n+1}\right)\frac{x^n}{n!}$$

逼近 $f(x)$, 则和用 $p_{n+1}(x)$ 逼近 $f(x)$ 的阶相同^[1]。当 $f^{(n+i)}(0) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$) 时, 如果用

$$p_{n-1}(x) + f^{(n)}\left[\frac{x}{\left(\frac{n+k}{n}\right)^{1/k}}\right]\frac{x^n}{n!}$$

逼近 $f(x)$, 则和用 $p_{n+k}(x)$ 逼近 $f(x)$ 的阶相同^[2]。

本文考虑二元函数的情形, 获得与上述一元函数相应的结果, 从而扩充了二元 Taylor 公式。

1 定理

为了方便起见, 我们只考虑形如 $[0, x; 0, y]$ 的区域。

设 $f(u, v)$ 在 $[0, x; 0, y]$ 连续, 且直到 n 阶连续可微, 则有 $(0, 1)$ 内的数 θ , 使

$$f(x, y) = p_{n-1}(x, y) + \frac{1}{n!} d^n f(\theta x, \theta y), \quad (1)$$

这是二元函数的 Taylor 公式^[3], 其中

$$p_{n-1}(x, y) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} d^i f(0, 0), \quad d^i f = \left(x \frac{\partial}{\partial u} + y \frac{\partial}{\partial v}\right)^i f.$$

收稿日期: 1993-12-24

如果 $d^{n+1}f(u, v)$ 在 $[0, x; 0, y]$ 存在, 在点 $(0, 0)$ 处连续, $d^{n+1}f(0, 0) \neq 0$, 并且当 $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$ 时二元 Taylor 公式(1)的余项中的 θ 的二重极限存在, 则有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \theta = \frac{1}{n+1},$$

这是文[4]的结果。

据此, 以 $\frac{1}{n+1}$ 代替二元 Taylor 公式(1)的余项中的 θ , 即用

$$g(x, y) = p_{n-1}(x, y) + \frac{1}{n!} d^n f\left(\frac{x}{n+1}, \frac{y}{n+1}\right)$$

逼近 $f(x, y)$, 有下述定理 1.

定理 1 如果 $d^{n+2}f(u, v)$ 在 $[0, x; 0, y]$ 存在且连续, 则有 $(0, 1)$ 内的数 θ , 使

$$f(x, y) = g(x, y) + \frac{1}{(n+2)!} \cdot \frac{n}{2(n+1)} \cdot d^{n+2}f(\theta x, \theta y). \quad (2)$$

如果 $d^{n+k}f(u, v)$ 在 $[0, x; 0, y]$ 存在, 在点 $(0, 0)$ 处连续,

$$d^{n+i}f(0, 0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k-1), \quad d^{n+k}f(0, 0) \neq 0,$$

并且当 $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ 时, 二元 Taylor 公式(1)的余项中的 θ 的二重极限存在, 则有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \theta = \frac{1}{\left(\frac{n+k}{n}\right)^{1/k}},$$

这也是文[4]的结果。

据此, 以 $\frac{1}{\left(\frac{n+k}{n}\right)^{1/k}}$ 代替二元 Taylor 公式(1)的余项中的 θ , 即用

$$h(x, y) = p_{n-1}(x, y) + \frac{1}{n!} d^n f\left[\frac{x}{\left(\frac{n+k}{n}\right)^{1/k}}, \frac{y}{\left(\frac{n+k}{n}\right)^{1/k}}\right]$$

逼近 $f(x, y)$, 有下述定理 2.

定理 2 如果 $d^{n+k+1}f(u, v)$ 在 $[0, x; 0, y]$ 存在且连续, 并且 $d^{n+i}f(0, 0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k-1)$, 则有 $(0, 1)$ 内的数 θ , 使

$$f(x, y) = h(x, y) + \frac{1}{(n+k+1)!} \left[1 - \frac{n+k+1}{(k+1)\left(\frac{n+k}{n}\right)^{1/k}}\right] d^{n+k+1}f(\theta x, \theta y). \quad (3)$$

2 定理的证明

定理 1 的证明 使用二元 Taylor 公式, 并采用积分余项^[5], 有

$$f(x, y) = p_{n+1}(x, y) + \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-t)^{n+1} d^{n+2}f(tx, ty) dt,$$

而

$$\begin{aligned} d^n f\left(\frac{x}{n+1}, \frac{y}{n+1}\right) &= d^n f(0, 0) + \left(\frac{x}{n+1} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{y}{n+1} \frac{\partial}{\partial v}\right) d^n f(0, 0) \\ &\quad + \int_0^1 (1-t) \left(\frac{x}{n+1} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{y}{n+1} \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 d^n f\left(\frac{tx}{n+1}, \frac{ty}{n+1}\right) dt \\ &= d^n f(0, 0) + \frac{1}{n+1} d^{n+1}f(0, 0) + \frac{1}{(n+1)^2} \int_0^1 (1-t) d^{n+2}f\left(\frac{tx}{n+1}, \frac{ty}{n+1}\right) dt, \end{aligned}$$

于是

$$f(x, y) - g(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-t)^{n+1} d^{n+2} f(tx, ty) dt \\ - \frac{1}{(n+1)!(n+1)} \int_0^1 (1-t) d^{n+2} f\left(\frac{tx}{n+1}, \frac{ty}{n+1}\right) dt,$$

对后面的积分令 $\tau = \frac{t}{n+1}$, 有

$$f(x, y) - g(x, y) \\ = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-t)^{n+1} d^{n+2} f(tx, ty) dt - \frac{1}{(n+1)!} \int_0^{\frac{1}{n+1}} [1 - (n+1)\tau] d^{n+2} f(\tau x, \tau y) d\tau \\ = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^{\frac{1}{n+1}} G(t) d^{n+2} f(tx, ty) dt + \frac{1}{(n+1)!} \int_{\frac{1}{n+1}}^1 (1-t)^{n+1} d^{n+2} f(tx, ty) dt,$$

其中

$$G(t) = (1-t)^{n+1} + (n+1)t - 1,$$

因 $G'(t) > 0$ ($0 < t \leq \frac{1}{n+1}$), 且 $G(0) = 0$, 所以 $G(t) > 0$ ($0 < t \leq \frac{1}{n+1}$). 于是由积分

中值定理, 存在 $(0, \frac{1}{n+1})$ 内的数 θ_1 及 $(\frac{1}{n+1}, 1)$ 内的数 θ_2 , 使

$$f(x, y) - g(x, y) \\ = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+2} f(\theta_1 x, \theta_1 y) \int_0^{\frac{1}{n+1}} G(t) dt + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+2} f(\theta_2 x, \theta_2 y) \int_{\frac{1}{n+1}}^1 (1-t)^{n+1} dt \\ = \frac{1}{(n+2)!} \cdot \frac{n}{2(n+1)} [(1-\alpha) d^{n+2} f(\theta_1 x, \theta_1 y) + \alpha d^{n+2} f(\theta_2 x, \theta_2 y)],$$

其中

$$\alpha = 2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1},$$

由 Bernoulli 不等式,

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} > 1 + \frac{n+1}{n} > 2,$$

知 $0 < \alpha < 1$. 再用介值定理即证。

定理2的证明 记 $C = \binom{n+k}{n}^{1/k}$. 使用二元 Taylor 公式, 并采用积分余项, 有

$$f(x, y) = p_{n+k}(x, y) + \frac{1}{(n+k)!} \int_0^1 (1-t)^{n+k} d^{n+k+1} f(tx, ty) dt,$$

而

$$d^n f\left(\frac{x}{c}, \frac{y}{c}\right) = d^n f(0, 0) + \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{c} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{y}{c} \frac{\partial}{\partial v} \right)^k d^n f(0, 0) \\ + \frac{1}{k!} \int_0^1 (1-t)^k \left(\frac{x}{c} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{y}{c} \frac{\partial}{\partial v} \right)^{k+1} d^n f\left(\frac{tx}{c}, \frac{ty}{c}\right) dt \\ = d^n f(0, 0) + \frac{1}{k! c^k} d^{n+k} f(0, 0) + \frac{1}{k! c^{k+1}} \int_0^1 (1-t)^k d^{n+k+1} f\left(\frac{tx}{c}, \frac{ty}{c}\right) dt,$$

于是

$$f(x, y) - h(x, y) = \frac{1}{(n+k)!} \int_0^1 (1-t)^{n+k} d^{n+k+1} f(tx, ty) dt \\ - \frac{1}{(n+k)! c} \int_0^1 (1-t)^k d^{n+k+1} f\left(\frac{tx}{c}, \frac{ty}{c}\right) dt,$$

对后面的积分令 $\tau = \frac{t}{c}$, 有

$$\begin{aligned}
& f(x, y) - h(x, y) \\
&= \frac{1}{(n+k)!} \int_0^1 (1-t)^{n+k} d^{n+k+1} f(tx, ty) dt - \frac{1}{(n+k)!} \int_0^{\frac{1}{c}} (1-c\tau)^k d^{n+k+1} f(\tau x, \tau y) d\tau \\
&= \frac{1}{(n+k)!} \int_0^{\frac{1}{c}} H(t) d^{n+k+1} f(tx, ty) dt + \frac{1}{(n+k)!} \int_{\frac{1}{c}}^1 (1-t)^{n+k} d^{n+k+1} f(tx, ty) dt,
\end{aligned}$$

其中

$$H(t) = (1-t)^{n+k} - (1-ct)^k,$$

据推广的 Bernoulli 不等式^[5], 有

$$(1-t)^c > 1-ct \quad (0 < t < 1, c > 1),$$

因 $ck > n+k$ ^[2], 即有

$$(1-t)^{n+k} > (1-t)^{ck} > (1-ct)^k,$$

所以 $H(t) > 0$ ($0 < t \leq \frac{1}{c}$). 于是由积分中值定理, 存在 $(0, \frac{1}{c})$ 内的数 θ_1 及 $(\frac{1}{c}, 1)$ 内的数 θ_2 , 使

$$\begin{aligned}
& f(x, y) - h(x, y) \\
&= \frac{1}{(n+k)!} d^{n+k+1} f(\theta_1 x, \theta_1 y) \int_0^{\frac{1}{c}} H(t) dt + \frac{1}{(n+k)!} d^{n+k+1} f(\theta_2 x, \theta_2 y) \int_{\frac{1}{c}}^1 (1-t)^{n+k} dt \\
&= \frac{1}{(n+k+1)!} \left[1 - \left(\frac{n}{k+1} + 1 \right) \frac{1}{c} \right] [(1-\alpha) d^{n+k+1} f(\theta_1 x, \theta_1 y) + \alpha d^{n+k+1} f(\theta_2 x, \theta_2 y)],
\end{aligned}$$

其中

$$\alpha = \frac{(1 - \frac{1}{c})^{n+k+1}}{1 - (\frac{n}{k+1} + 1) \frac{1}{c}}.$$

由 Bernoulli 不等式及 $kc > n+k$, 有

$$(1 + \frac{1}{c-1})^{n+k+1} > 1 + \frac{n+k+1}{c-1} > 1 + \frac{n+k+1}{(k+1)c - n - k - 1},$$

即有

$$0 < (1 - \frac{1}{c})^{n+k+1} < 1 - (\frac{n}{k+1} + 1) \frac{1}{c},$$

所以 $0 < \alpha < 1$.

再用介值定理即证。

3 举 例

当 $d^2 f(0, 0) = 0$ 时, 在(1)中令 $n = 3$, 有

$$f(x, y) = f(0, 0) + df(0, 0) + \frac{1}{6} d^3 f(\theta x, \theta y); \quad (4)$$

在(2)中令 $n = 1$, 有

$$f(x, y) = f(0, 0) + df(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}) + \frac{1}{24} d^3 f(\theta x, \theta y); \quad (5)$$

在(3)中令 $n = 1, k = 2$, 有

$$f(x, y) = f(0, 0) + df\left(\frac{x}{\sqrt{3}}, \frac{y}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{24}\left(1 - \frac{4}{3\sqrt{3}}\right)d^4f(\theta x, \theta y). \quad (6)$$

例 $f(x, y) = \arctg \frac{x+y}{1-xy}, \quad d^2f(0, 0) = 0.$

由(4)(5)(6)分别得近似公式:

$$f(x, y) \approx x + y, \quad \frac{1}{6} \max_{0 \leq \theta \leq 1} |d^3f(\theta x, \theta y)| = \frac{x^3 + y^3}{3}; \quad (7)$$

$$f(x, y) \approx \frac{4x}{4+x^2} + \frac{4y}{4+y^2}, \quad \frac{1}{24} \max_{0 \leq \theta \leq 1} |d^3f(\theta x, \theta y)| = \frac{x^3 + y^3}{12}; \quad (8)$$

$$f(x, y) \approx \frac{3x}{3+x^2} + \frac{3y}{3+y^2},$$

$$\frac{1}{24}\left(1 - \frac{4}{3\sqrt{3}}\right) \max_{0 \leq \theta \leq 1} |d^4f(\theta x, \theta y)| = \frac{5}{8}\left(1 - \frac{4}{3\sqrt{3}}\right) \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{(\sqrt{5}-1)^4} (x^4 + y^4). \quad (9)$$

表 $\arctg \frac{x+y}{1-xy}$ 的近似值

(x, y)	(0.1, 0.1)	(0.1, 0.5)	(0.5, 0.5)
近似公式(7)	$0.2 \pm 7 \times 10^{-4}$	$0.6 \pm 4 \times 10^{-2}$	$1 \pm 8 \times 10^{-2}$
近似公式(8)	$0.1995 \pm 2 \times 10^{-4}$	$0.57 \pm 1 \times 10^{-2}$	$0.94 \pm 2 \times 10^{-2}$
近似公式(9)	$0.199336 \pm 9 \times 10^{-6}$	$0.561 \pm 3 \times 10^{-3}$	$0.923 \pm 6 \times 10^{-3}$

当 $|x|, |y|$ 都较小时, 显然(9)优于(7)(8).

参 考 文 献

- 1 Potfald E I. The remainder in Taylor's formula, Amer Math Monthly, 1989, 97: 205~213
- 2 费荣昌. Taylor公式的扩充(待发表)
- 3 Г. М. 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程. 人民教育出版社, 1959
- 4 费荣昌, 王茂南. 二元 Taylor 公式的中值的渐近状态. 数学教学与研究, 1993, 16~19
- 5 张筑生. 数学分析新讲: 第二册. 北京大学出版社, 1990

The Extension of Taylor's Formula for Two Variables

Fei Rongchang Huang Wenhua

(Dept. of General Education)

Abstract The results of paper[1][2] were spread to two-variables function. The Taylor's formula for two variables is therefrom extended.

Key-words Taylor's formula for two variables; Mean value of remainder; Approach